

Das Problem der täglichen Sonnenscheindauer

Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

Verfasser: Thomas Raffler

Bewertung Facharbeit: Punkte _____

Kursleiter: StR B. Siller

Bewertung mündl. Prüfung: Punkte _____

Abgabetermin: 28.01.2005

Unterschrift des Kursleiters: _____

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Tatsächliche Sonnenscheindauer	3
2.1. Zustandekommen der tatsächlichen Sonnenscheindauer	3
2.2. Messmethoden in der Meteorologie	4
3. Messung der astronomischen Sonnenscheindauer	6
3.1. Vorüberlegungen	6
3.2. Verwendetes Verfahren	6
3.3. Konstruktion der Mess-Apparatur	7
3.4. Stationäre Messstation	9
3.5. Durchführung der stationären Messung	10
3.6. Mobile Messstation	13
3.7. Durchführung der mobilen Messung	14
3.8. Ergebnis der mobilen Messung	15
4. Berechnung der astronomischen Sonnenscheindauer	16
4.1. Vorüberlegungen	16
4.2. Verwendete Grundlagen	16
4.3. Sonnenscheindauer in Abhängigkeit der Deklination	18
4.4. Vorläufige Ergebnisse	21
4.5. Berechnung der Deklination	21
4.6. Ergebnisse der gefundenen Formel	24
4.7. Vergleich mit komplexen Berechnungsmethoden	25
4.8. Gründe für die Abweichung	26
4.9. Optimierung der Berechnung	29
4.10. Ergebnisse der optimierten Berechnung	32
5. Zusatz	33
5.1. Erstellung der dreidimensionalen Grafiken	33
5.2. Die Facharbeit als Internetseite	34
5.3. Online-Berechnung der Sonnenscheindauer	34
5.4. Verwendete Programme	34
6. Schluss	35
7. Literaturverzeichnis	36
8. Abbildungsverzeichnis	36

1. Einleitung

Viele Menschen unserer hochtechnisierten Gesellschaft führen ein Leben, in dem sie sich weitgehend unabhängig von der Natur und all ihren Unwägbarkeiten fühlen. Vor allem in Städten könnte man den Glauben gewinnen, dass die Umwelt keinen Einfluss mehr auf das Leben des Einzelnen hat. Man lebt in einer künstlich geschaffenen Welt, das Essen kommt aus dem Supermarkt und die Witterung wird gar nicht beachtet, da man sich sowieso in klimatisierten Räumen aufhält. Doch trotzdem gibt es einen natürlichen Faktor, der das Leben eines Jeden entscheidend bestimmt. Auch wenn sich die Menschheit mit der Erfindung der Glühlampe unabhängiger vom Tageslicht machte, so lebt sie doch noch immer nach dem Tag- und Nacht-Rhythmus, den ihnen die Sonne vorgibt. Die tägliche Sonnenscheindauer ist damit einer der bedeutendsten Faktoren in unserem Leben.

Natürlich ist man für diverse Tätigkeiten nicht mehr auf das Sonnenlicht angewiesen, aber trotzdem fällt es jedem auf, wenn im Winter die Tage kürzer und die Nächte länger werden. Denn die Sonnenscheindauer macht (neben der Strahlungsintensität) letztendlich den größten Unterschied zwischen den verschiedenen Jahreszeiten unserer Breitengrade aus. Während in anderen Klimazonen die jährliche Regenzeit den Jahrestakt vorgibt, wird unser Zeitgefühl von der gleichmäßig schwankenden Sonnenscheindauer geprägt. Aus diesem Grund ist es auch nachvollziehbar, dass wir alle längeren Zeiträume, wie zum Beispiel unser Alter, in Jahren angeben, da dies die einzige größere Zeitkonstante ist, die ein jeder in gleicher Weise erfährt.

In dieser Arbeit wird „Das Problem der täglichen Sonnenscheindauer“ behandelt, deren Entstehung, Messung und Berechnung.

2. Tatsächliche Sonnenscheindauer

Die theoretische Sonnenscheindauer lässt sich, wie aus der später folgenden Berechnung ersichtlich wird, rechnerisch bestimmen. In der Realität hat sie aber nur eine eingeschränkte Bedeutung. Aus diesem Grund möchte ich zuerst näher auf für den Menschen relevante Begebenheiten eingehen.

2.1. Zustandekommen der tatsächlichen Sonnenscheindauer

Die astronomische Sonnenscheindauer definiert lediglich die maximal mögliche Zeitspanne, in der direkte Sonneneinstrahlung herrscht. Diese wird aber nur selten erreicht, da sie in den meisten Fällen durch andere Faktoren stark herabgesetzt wird. Diese Faktoren unterteile ich in statische und dynamische Faktoren.

Statische Faktoren

Die statischen Faktoren können natürlichen Ursprungs sein, so wie die Geländeform der Umgebung, oder aber auch vom Menschen geschaffene Bauwerke. Sie alle haben gemeinsam, dass sie die Sonnenscheindauer das ganze Jahr über verringern, meist in Form eines späteren Sonnenaufgangs und eines vorzeitigen Sonnenuntergangs. Als Beispiel kann man hier Bergtäler nennen, bei denen auch im Sommer die Tage kurz sind und im Winter kaum Licht über das höher liegende Gebirge kommt.

Gleichermaßen kann eine erhöhte Position, z.B. auf einem Berg, zu einer verlängerten Sonnenscheindauer führen.

Dynamische Faktoren

Noch größeren Einfluss auf die tägliche Sonnenscheindauer hat die Zusammensetzung unserer Atmosphäre, da sie das Sonnenlicht absorbieren kann. Wie man täglich beobachten kann, produziert das Wetter die größten Abweichungen von der theoretischen Sonnenscheindauer.

Wenn bei bewölktem Himmel nur noch diffuses Licht auf die Erde trifft, wird es vom Menschen nicht mehr als Sonnenschein empfunden. Doch auch Luftverschmutzung (Smog in Großstädten) führt zu diesem Effekt. Weitere dynamische Faktoren sind im Normalfall nicht anzutreffen, man könnte hier höchstens noch eine Sonnenfinsternis, Ascheregen nach einem Vulkanausbruch oder einen Sandsturm aufführen.

Die dynamischen Faktoren, vor allem das Wetter, lassen sich leider nicht in einfachen Formeln erfassen, weshalb vor allem deren Beobachtung und Aufzeichnung interessant ist.

2.2. Messmethoden in der Meteorologie

Da die Sonnenscheindauer bei meteorologischen Aufzeichnungen auch ein wichtiges Maß für längerfristige Klimabeobachtungen ist, wurden zur Erfassung verschiedene Messinstrumente und Auswerteverfahren entwickelt.

Sonnenscheinautograph nach Campbell und Stokes



„Der sogenannte Campbell-Stokes-Schreiber brennt durch die Lupenwirkung einer Glaskugel die SSD als Spur auf einen Schreibstreifen.“¹ Aus der Länge der gebrannten Spur kann dann die Sonnenscheindauer (SSD) abgelesen werden. Die mit dieser bewährten Methode ermittelten Werte sind trotz neuerer elektronischer Messeinrichtungen am zuverlässigsten.

Abb.2-1: Fairmount Weather Systems:
<http://www.fairmountweather.com>

Elektronische Messung der Sonnenscheindauer

Für die elektronische Messung hat sich nach meinen Recherchen noch kein Standard durchgesetzt, jede Wetterstation verwendet andere Messgeräte. Deshalb kann nur das ungefähre Prinzip geschildert werden:

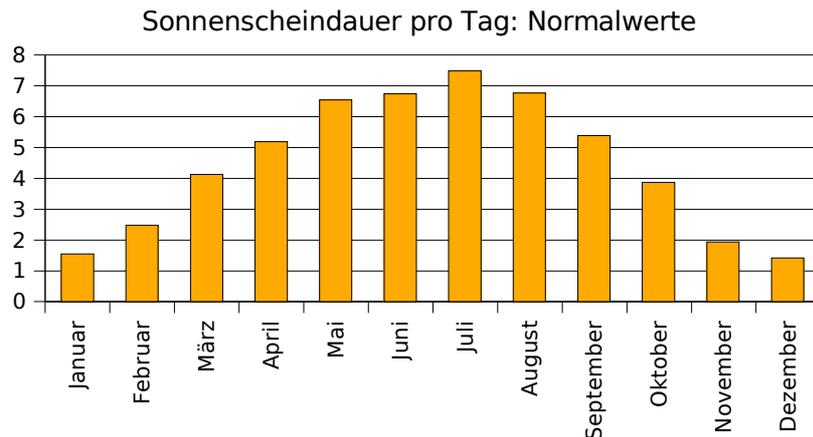
Bei manchen Einrichtungen werden zwei Strahlungssensoren in Form von Fotodioden oder Fotowiderständen eingesetzt, deren Werte einzeln aufgezeichnet werden. Ein Strahlungssensor ist den ganzen Tag dem direkten Sonnenlicht ausgesetzt, während der andere beschattet ist, so dass nur diffuses Licht zu ihm gelangen kann. Wenn sich die Werte von Sonne und Schatten stark unterscheiden, kann bei diesem Messverfahren davon ausgegangen werden, dass die Sonne scheint. Bei nur geringer Differenz ist die Bewölkung so stark, dass beide Sensoren durch diffuses Licht der Wolken in ähnlicher Weise beleuchtet werden. Durch für jeden Tag fest definierte Grenzwerte kann dann entschieden werden, ob die Sonne scheint oder nicht. Andere Messstationen verwenden auch einen einzelnen Sensor, der lediglich prüft, ob die Strahlungsenergie über 120 W/m^2 – dem vom Deutschen Wetterdienst empfohlenen Schwellwert – liegt.

1 Andreas Vohl: Sonnenscheindauer, Internetseite <http://www.wetterstation-goettingen.de/sonnenscheindauer.htm> vom 17.06.2004, aufgerufen am 18.01.2005 (s. Anhang C 1)

Da keine allgemein anerkannte Definition von Sonnenschein gefunden worden ist, ist die „Sonnenscheindauer [...] einer der heikelsten Werte in der Meteorologie“². Bei den meisten Wetterstationen wird mit elektronischen Auswerteverfahren versucht, Werte zu erreichen die denen des Sonnenscheinautographen ähnlich sind.

Messdaten³

Messtation München/Flughafen, Sonnenscheindauer im Monatsmittel



Messtation München/Flughafen, Sonnenscheindauer im Jahresmittel

4:58 Stunden im Jahr 2004

4:33 Stunden als Normalwert

² Andreas Vohl: Sonnenscheindauer, Internetseite <http://www.wetterstation-goettingen.de/sonnenscheindauer.htm> vom 17.06.2004, aufgerufen am 18.01.2005 (s. Anhang C 1)

³ Deutscher Wetterdienst: Klimadaten; Internetseite <http://www.dwd.de/de/WundK/Klimadaten/index.htm>, aufgerufen am 22.01.05

3. Messung der astronomischen Sonnenscheindauer

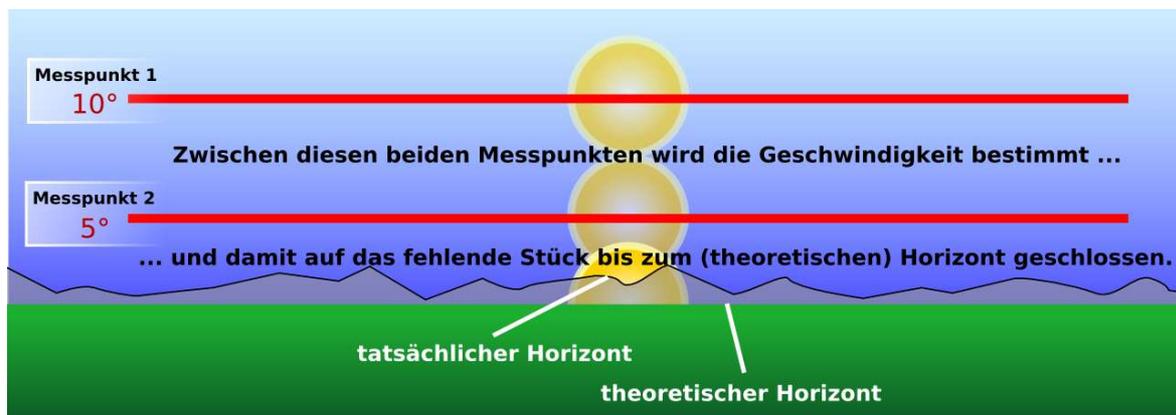
3.1. Vorüberlegungen

Da ich die spätere Berechnung der astronomischen Sonnenscheindauer durch eine davon unabhängige Messreihe überprüfen wollte, war es notwendig ein geeignetes Messverfahren zu finden. Um die theoretische Sonnenscheindauer zu ermitteln, muss die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und dem Sonnenuntergang bestimmt werden. Deshalb ist auch die schon erwähnte traditionelle meteorologische Messung nicht hilfreich, die über den ganzen Tag nur Sonnenschein einer bestimmten Intensität aufzeichnet. Zudem ist der tatsächliche Aufgangspunkt der Sonne bei den meisten Standorten nicht ersichtlich.

Es muss also ein Messverfahren entwickelt werden, bei dem der Zeitpunkt von theoretischem Sonnenuntergang und Sonnenaufgang bestimmt wird. Dies sollte aber unabhängig von der Strahlungsintensität und von der Geländeform der Umgebung sein. Deshalb wird es notwendig sein, den exakten, nicht beobachtbaren Zeitpunkt, anhand von Messergebnissen rechnerisch zu ermitteln.

3.2. Verwendetes Verfahren

Das verwendete Verfahren basiert auf der Idee, dass sich die Sonne beim Sonnenuntergang in gleichförmiger Geschwindigkeit dem Horizont nähert und dann bei einer bestimmten Position über dem Horizont (z.B. 0°) als untergegangen gilt. Um nun die Zeit bis zum eventuell nicht mehr sichtbaren Untergang rechnerisch zu überbrücken, muss die Geschwindigkeit der Sonne gemessen werden und dann in linearer Weise auf das fehlende Stück geschlossen werden:



In der obigen Grafik ist eine mögliche Messung dargestellt. Es existieren zwei Messpunkte, einer bei 5° und einer bei 10° , zwischen denen die Geschwindigkeit ermittelt wird. Messpunkte in diesem niedrigen Bereich sind

auch anzustreben, da damit der künstlich berechnete Teil klein ist und weniger Einfluss auf die Messung hat. In diesem Beispiel wäre die Auswertung der Messung auch recht einfach, da die Zeit zwischen den beiden Messpunkten genau so groß wie die Zeit vom 2. Messpunkt bis zum gesuchten Sonnenuntergang sein muss.

3.3. Konstruktion der Mess-Apparatur

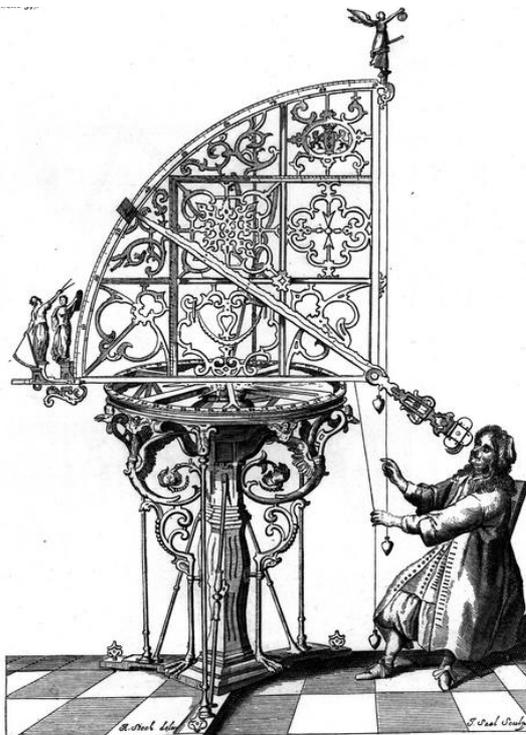
Ziel der Messung

Wie in der Grafik gezeigt, muss also für zwei verschiedene Messpunkte die Höhe der Sonne über dem Horizont und die zugehörige Zeit bestimmt werden. Dies kann theoretisch auf zwei verschiedene Arten geschehen:

- Messung des Winkels zu zwei verschiedenen festgelegten Zeitpunkten
- Erfassung der Zeit zu zwei verschiedenen festgelegten Winkeln

Historische Messinstrumente

Historische Messinstrumente in der Astronomie hatten ähnliche Bestimmungen. Damals war es wichtig, die Höhe von Gestirnen über dem Horizont messen zu können. Der bekannteste Verwendungszweck ist die Ortsbestimmung in der Seefahrt, die erst durch den Sextanten und durch die genaue Kenntnis der Uhrzeit praktikabel wurde.



Der Quadrant, der als früher Vorläufer des Sextanten gesehen werden kann, war ein Messgerät, „mit dem die Höhen und Positionen von Gestirnen ermittelt wurden“⁴. Dazu wurde ein Stern über ein optisches Visier angepeilt und mit Hilfe eines Senklotes der Winkel auf einige Bogenminuten genau abgelesen⁵.

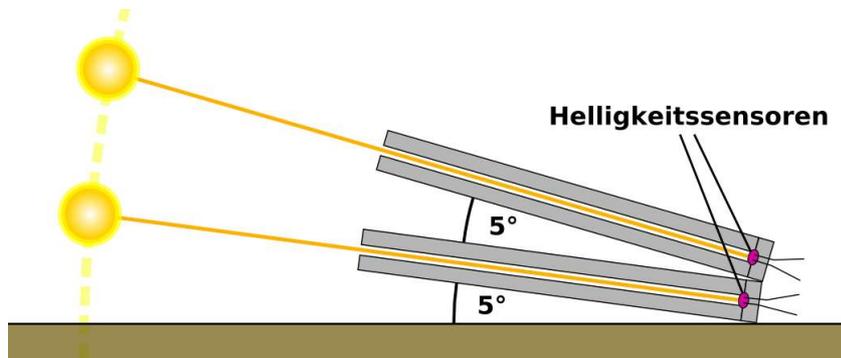
Abb. 3-2:
Crüger's großer Azimuthal-Quadrant,
Joh. A. Repsold; *Geschichte der*
Astronomischen Messwerkzeuge, Band 1,
Leipzig 1908, Seite 37

4 Artikel „Quadrant“, Wikipedia; Internetseite http://de.wikipedia.org/wiki/Quadrant_%28Astronomie%29, aufgerufen am 10.01.05 (s. Anhang C 7)

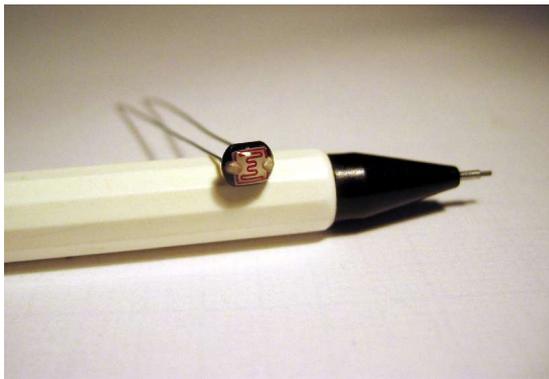
5 vgl. Artikel „Quadrant“, Wikipedia; a.a.O

Aufbau des eigenen Messgeräts

Da die Messung zu jeder Jahreszeit unter ähnlichen Bedingungen ablaufen soll, werde ich versuchen, zu zwei festgelegten Winkeln die zugehörigen Zeitpunkte zu bestimmen, an denen die Sonne diese durchquert:

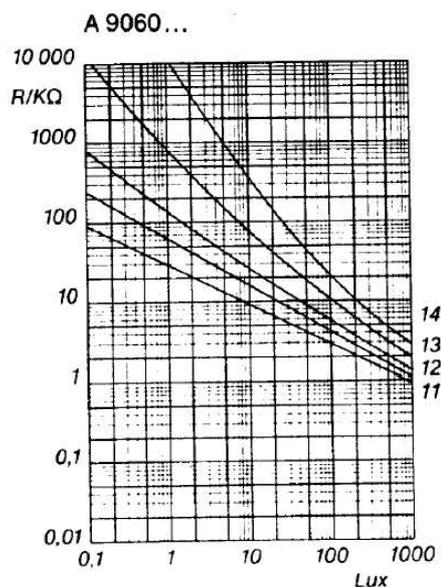


Hierbei wird das optische Visier des Quadranten durch ein „elektronisches“ ersetzt. Wenn die Sonne die beiden Winkelhöhen durchquert, soll dies jeweils durch einen Helligkeitssensor am Ende eines Spaltes angezeigt werden. Das Sonnenlicht soll nur in dem durch den Spalt definierten Winkel auf den Sensor treffen können.



Für diesen Einsatzzweck habe ich den Fotowiderstand A 9060-11 ausgewählt: „Fotowiderstände sind stromrichtungsunabhängige Halbleiterbauelemente, die ihren Widerstandswert beleuchtungsabhängig ändern.“⁶

Abb. 3-4: Widerstand im Größenvergleich



Bei der im Graphen 11 vorliegenden logarithmischen Skalierung der y-Achse (Widerstand in Kilo-Ohm) ähnelt der Verlauf dem einer Geraden. Bei geringer Helligkeit (0,1 Lux) beträgt der Widerstand 100 kOhm und bei 1000 Lux ergeben sich 1 KOhm. Von mir wurde zusätzlich noch der Wert von 0,3 KOhm bei direkter Sonneneinstrahlung gemessen.

Abb. 3-5: Widerstandsverlauf des Fotowiderstands aus dessen Datenblatt

6 Heimann Elektronik; Datenblatt des Fotowiderstands A 9060-11 (s. Anhang C 2)

3.4. Stationäre Messstation

Die erste Messstation ist mein Versuch, eine halbautomatische Messung durchzuführen, bei der möglichst viele Ergebnisse von verschiedenen Tagen gewonnen werden können. Die Messung muss an unserem Haus durchgeführt werden, um mit vertretbarem Aufwand eine elektronische Aufzeichnung zu ermöglichen. Dies hat jedoch zur Folge, dass sehr große Winkel gewählt werden müssen, bei denen die Sonne nicht durch benachbarte Häuser und Bäume verdeckt wird. Leider war bis zum Winter aufgrund ungünstig stehender Bäume im Westen, nur eine Messung des Sonnenaufgangs möglich.

Messapparatur

Im Foto ist die am Balkon montierte Messeinrichtung zu sehen:



Die beiden Spalten sind aus Aluminiumblechen gefertigt, mit einem Abstand von 2 mm. Zur Vermeidung von Reflexion sind die Platten innen schwarz lackiert und der Lack-Glanz ist durch Anschleifen entfernt worden. Die beiden Fotowiderstände wurden parallel verbunden, damit sie mit einem Messkabel gemessen werden können.

Messfassung



Zur Erfassung der Daten dient die bereits im Haus installierte Heizungs- und Solarsteuerung UVR1611. Sie hat 14 analoge Eingänge für Temperatursensoren, die Widerstände im Kilo-Ohm-Bereich zurückgeben. An einem freien Temperatur-Ausgang sind die zwei parallel verbundenen Fotowiderstände angeschlossen.

Die Werte aller Sensoren mit der jeweiligen Uhrzeit werden minütlich im internen Speicher abgelegt. Über ein fest installiertes Kabel von der Steuerung im Keller zum PC im Erdgeschoss, können diese Daten jederzeit ausgelesen werden. Die Daten der Fotowiderstände liegen als Temperatur vor, die erst in einen Widerstand umgerechnet werden müsste. Dies ist aber nicht notwendig, da die Zeitpunkte der Minimalwerte entscheidend sind.

3.5. Durchführung der stationären Messung

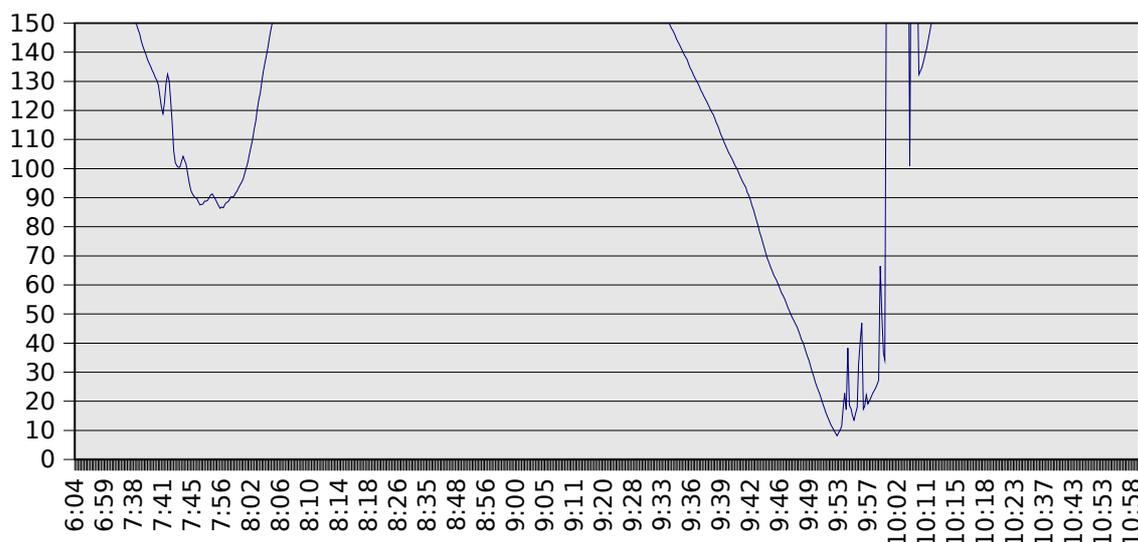
Die Messreihe wurde am 12.09.2004 gestartet. Wie sich bald herausstellt, können nur bei klarem Himmel Werte aufgezeichnet werden. Bei Nebel oder leichter Bewölkung reicht offenbar der Messbereich der Steuerung nicht aus, um den hohen Widerstand der Sensoren zu messen. Um mögliche Ungenauigkeiten durch das 1-minütige Messintervall zu umgehen, wird ein relativ großer Winkel zwischen den beiden Platten von 22° gewählt. Als Schwierigkeit erweist sich außerdem die Messung der beiden Winkel zur Lotrechten. Eine Wasserwaage als Referenzebene zum Messen der Höhendifferenz vorne und hinten an der Platte hat nur eine Genauigkeit von etwa 1 Grad. Das erste auswertbare Ergebnis war dann am 14. September.

Messung vom 14.9.04

Einstellungen:

1. Winkel: 9,3°; Abstand der Platten: 22°

Messung vom 14.9.04



Beim Sonnenaufgang des 14. September zeigt sich am 1. Messpunkt ein schwacher Ausschlag. Offenbar war zu dieser Zeit noch Frühnebel vorhanden, der die Beleuchtungsstärke herabsetzte. Aus dem Graphen der Aufzeichnung wurde der ungefähre Zeitpunkt des lokalen Minimums zu 7:55 Uhr bestimmt. Am 2. Messpunkt fällt der Widerstand zunächst kontinuierlich ab, was auf klares Wetter schließen lässt. Ab 9:52 Uhr steigt der Widerstand jedoch unerwartet unregelmäßig stark an. Hier haben Wolken eine exakte Bestimmung verhindert. Trotzdem soll aus den beiden Zeitpunkten ein Sonnenaufgang errechnet werden:

Zwischen dem 1. und dem 2. Messpunkt vergingen 117 Minuten:

$$\omega_{\text{Sonne}} = \frac{22^\circ}{117 \text{ min}} \quad (\text{Winkelgeschwindigkeit zwischen den Messpunkten})$$

Für die Zeit t zwischen Sonnenaufgang und 1. Messpunkt gilt nach der zugrundeliegenden Annahme die selbe Winkelgeschwindigkeit:

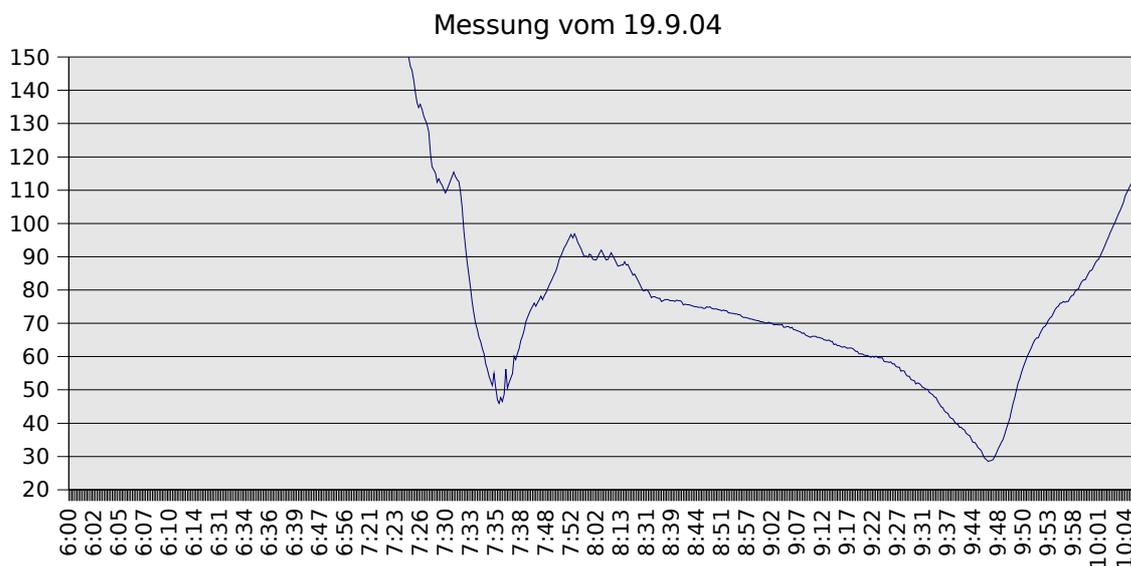
$$\omega_{\text{Sonne}} = \frac{9,3^\circ}{t} \Rightarrow t = \frac{9,3^\circ}{\omega_{\text{Sonne}}}$$

$$t = \frac{9,3^\circ}{22^\circ} \cdot 117 \text{ min} = 49 \text{ min}$$

Die Sonne ist demnach um 7:55 Uhr – 49 min aufgegangen, also um 7:06 Uhr. Dass dieser Wert nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt, verwundert bei den ungenauen Werten kaum. Nach dem lokalen Wetterdienst ist die Sonne bereits um 6:47 Uhr aufgegangen.

Messung vom 19.9.04

1. Winkel: $6,3^\circ$; Abstand der Platten: 22°



Bei diesem Graphen sind zwei klare lokale Minima ersichtlich, es herrschte optimales Wetter, ohne Frühnebel und Wolken. Der Graph sinkt beim zweiten Messpunkt bis auf 30 herab.

1. Messpunkt: 7:35; 2. Messpunkt: 9:47

Rechnung analog zur letzten:

$$t = \frac{6,3^\circ}{22^\circ} \cdot 132 \text{ min} = 38 \text{ min}$$

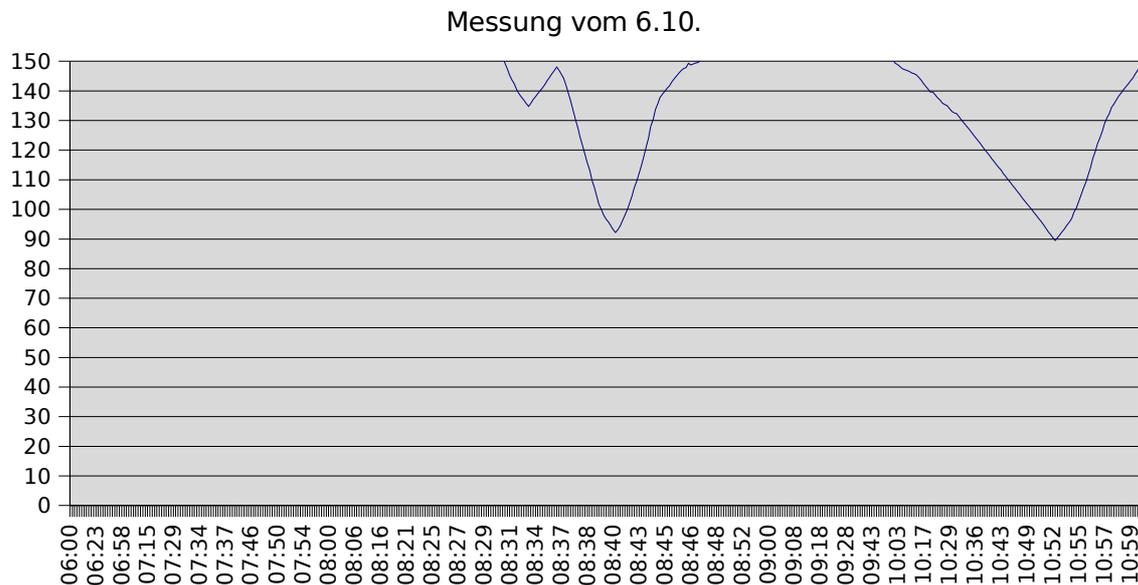
7:35 Uhr – 38 min = 6:57 Uhr

Dieses Ergebnis stimmt mit denen des Wetterdienstes bis auf 3 Minuten überein.

Messung vom 6.10.04

Der erste Winkel musste stark vergrößert werden, um nicht wie bei den letzten sonnigen Tagen (3.10. und 4.10.) im Schatten der Bäume zu liegen:

1. Winkel: $11,5^\circ$; Abstand der Platten: 22°



Bei diesem Graphen sind wieder zwei klare lokale Minima ersichtlich, allerdings mit wesentlich höheren Werten, die auf schlechte Beleuchtung schließen lassen.

1. Messpunkt: 8:41; 2. Messpunkt: 10:53

Rechnung analog zur letzten:

$$t = \frac{11,5^\circ}{22^\circ} \cdot 132 \text{ min} = 38 \text{ min}$$

8:41 Uhr – 69 min = 7:32 Uhr

Dieses Ergebnis weicht 14 Minuten von den Angaben des Wetterdienstes ab.

Wenn die beiden Messpunkte zu hoch über dem Horizont liegen, ist die Annahme mit der gleichförmigen Geschwindigkeit offenbar nicht mehr zutreffend, dabei kommt höchstwahrscheinlich die bogenförmige Bahn der Sonne zum Tragen.

Weitere Messungen

Die weiteren ausgelesenen Daten entsprachen in ihrer Qualität in etwa denen der ersten Messung, falls überhaupt ein Wert im Messbereich erfasst wurde. Es wurde daraufhin noch mit weiteren Einstellungen experimentiert, unter anderem wurde die Ausrichtung der Platten an die veränderte Richtung des Sonnenaufgangs angepasst. Trotzdem konnten keine auswertbaren Ergebnisse mehr erzielt werden, da das Wetter über Wochen hinweg keinen morgendlich klaren Himmel zuließ. Im November lag dann der Aufstellort der Messeinrichtung morgens zu lange im Schatten des Nachbarhauses, so dass nur noch der zweite, spätere Messpunkt aufgezeichnet wurde.

3.6. Mobile Messstation

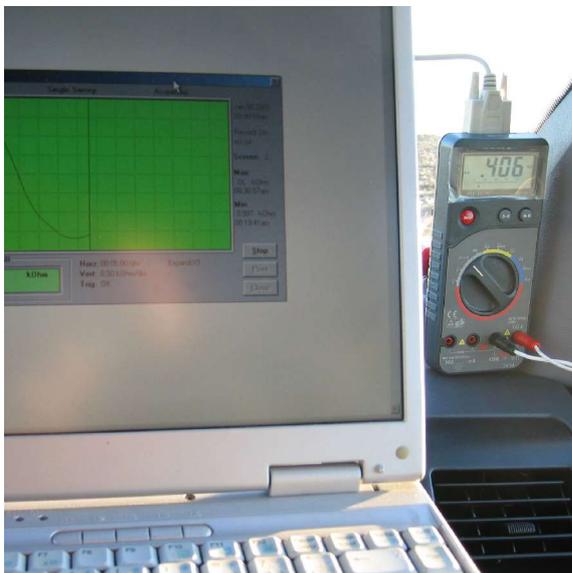
Um auch im Winter messen zu können, muss die Messeinrichtung einen Standort mit weitgehend freier Umgebung einnehmen können. Dazu wird eine zweite (verbesserte) Messstation gebaut, die unabhängig von der Heizungssteuerung am Haus eingesetzt werden kann. Außerdem sollten die Messpunkte wesentlich dichter über dem Horizont sein, um genauere Ergebnisse zu erreichen.

Messapparatur



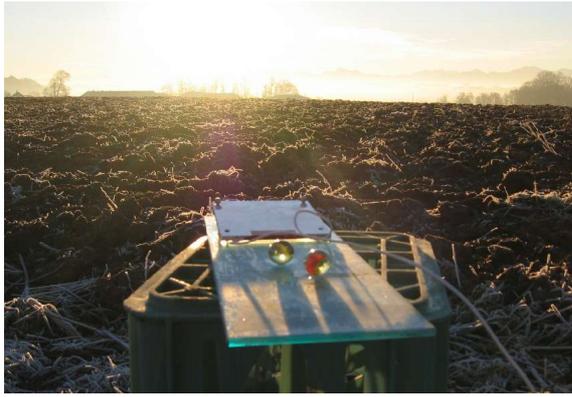
Bei der mobilen Messstation wird nur ein Spalt (2 mm) verwendet, dessen Winkel aber durch Umdrehen schnell verstellt werden kann. Die beiden Winkel sind mit den Schrauben oben und unten festgelegt. Als lotrechte Ebene dient eine Glasplatte.

Messfassung



Die Erfassung der Messdaten übernimmt dieses Mal das Digitalmultimeter Metex ME-31, das über die serielle Schnittstelle am Laptop angeschlossen ist. Damit können die Daten im Sekundentakt ausgelesen und gespeichert werden. Ein großer Vorteil dieser Methode ist der große und genaue Messbereich des Multimeters. Dadurch sollte eine sehr exakte Bestimmung der Minima möglich sein.

3.7. Durchführung der mobilen Messung



Das Bild zeigt die Messung des Sonnenaufgangs am 8. Januar 2005. Zum Ausrichten der Lotrechten wurden Glasmurmeln verwendet, deren Davonrollen anzeigt, in welche Richtung die Referenzebene korrigiert werden muss. Dies erwies sich als wesentlich genauer als eine Wasserwaage.

An diesem Tag konnte dank hervorragender Wetterlage der Sonnenaufgang und der Sonnenuntergang gemessen werden, wobei dafür zwei unterschiedliche Orte mit möglichst freiem Horizont gewählt wurden.

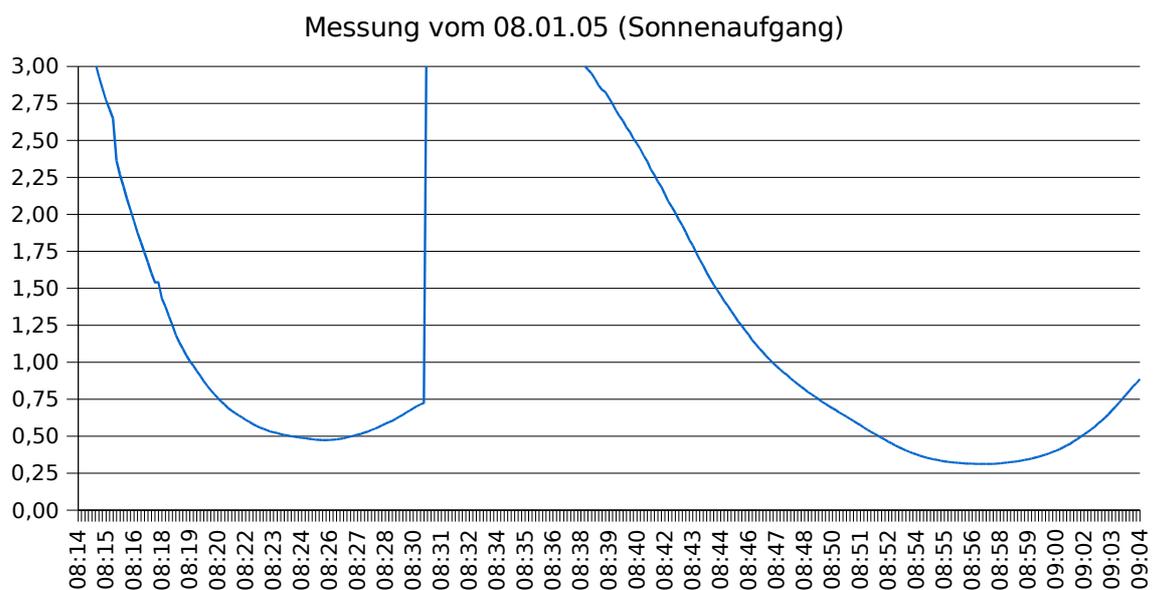
Die Glasplatte wurde wie beschrieben genau lotrecht und in Richtung des Sonnenaufgangs ausgerichtet und der Widerstand des Sensors mit dem Laptop im Auto protokolliert. Nach dem Durchgang der Sonne durch den 1. Messpunkt wird die Aluplatte umgedreht, um den zweiten Winkel herzustellen.

Einstellungen

Mit den vier Schrauben wurden die zwei möglichen Positionen fest eingestellt, mittels einer Schublehre genau abgemessen und daraus der Winkel errechnet:

1. Winkel zur Lotrechten: $2,91^\circ$
2. Winkel zur Lotrechten: $6,73^\circ$

Messprotokoll Sonnenaufgang



Der Graph des Fotowiderstands (in KOhm) weist zwei lokale Tiefpunkte auf, die die beiden Messpunkte repräsentieren. Um 8:30 Uhr, nachdem der erste Messpunkt schon deutlich durchschritten war, wurde die Platte auf den

zweiten, größeren Winkel umgedreht. Dadurch kam auch der sprunghafte Anstieg des Widerstandes zustande. Beachtenswert ist auch der Verlauf des Widerstands, der trotz identischer Fotowiderstände völlig anders als bei der stationären Messstation ist. Die Skalierung der Heizungssteuerung für die Temperatursensoren ist nämlich, im Gegensatz zu der eines Multimeters, logarithmisch.

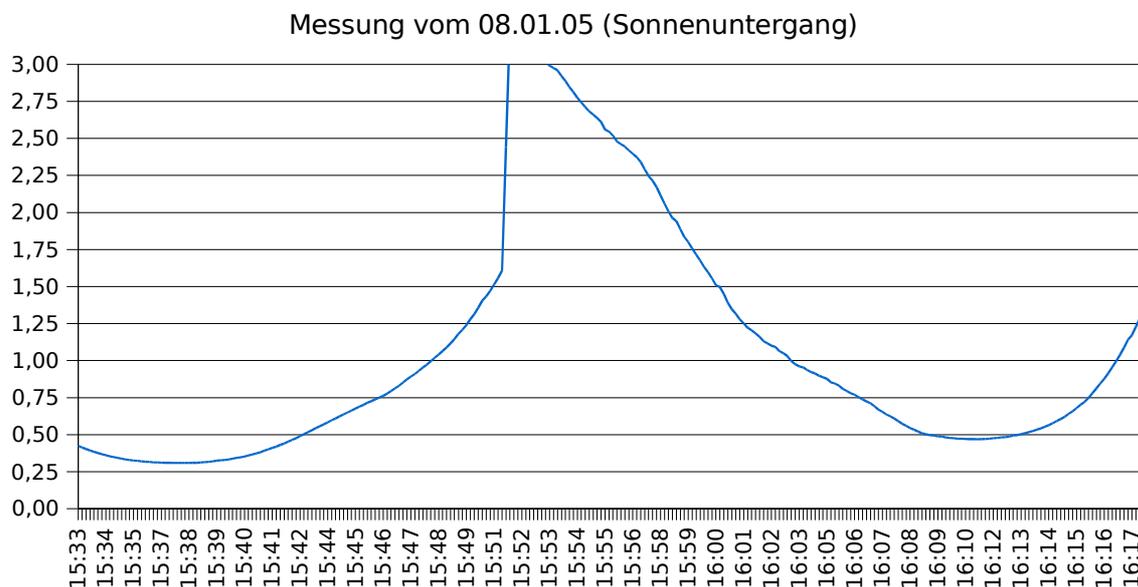
Ergebnisse:

1. Messpunkt: 8:26:00 bei 474 Ohm; 2. Messpunkt: 8:57:30 bei 312 Ohm

$$\omega = \frac{6,73^\circ - 2,91^\circ}{31,5 \text{ min}} \Rightarrow \dots \Rightarrow t = 24 \text{ min}$$

Nach dieser Messung ist die Sonne also um 8:02 Uhr aufgegangen.

Messprotokoll Sonnenuntergang



Ergebnisse:

1. Messpunkt: 15:37:50 bei 309 Ohm; 2. Messpunkt: 16:11:20 bei 469 Ohm

$$\omega = \frac{6,73^\circ - 2,91^\circ}{33,5 \text{ min}} \Rightarrow \dots \Rightarrow t = 25,5 \text{ min}$$

Nach dieser Messung ist die Sonne also um 16:37 Uhr untergegangen.

3.8. Ergebnis der mobilen Messung

Aus den beiden Messungen ergibt sich ein Sonnenaufgang um 8:02 Uhr und ein Sonnenuntergang um 16:37. Dies entspricht einer Sonnenscheindauer von 8 Stunden und 35 Minuten.

Im Vergleich dazu:

Meine theoretische Berechnung: 8 Stunden und 36 Minuten.

Die Tabelle des US Naval Observatory: Sonnenschein von 8:00 bis 16:37, also 8 Stunden und 37 Minuten.

4. Berechnung der astronomischen Sonnenscheindauer

4.1. Vorüberlegungen

Die astronomische Sonnenscheindauer bezeichnet die maximale Sonnenscheindauer eines Tages, die unter idealen Bedingungen möglich ist.

In der Fachlektüre wird bei der Berechnung der astronomischen Sonnenscheindauer meist auf die „Astronomischen Algorithmen“ von Jean Meeus verwiesen, die auch bei kommerziellen Programmen zur Berechnung astronomischer Größen verwendet werden.

Für einen Laien sind diese Algorithmen aber kaum verständlich, da sie auf komplexen astronomischen Grundlagen aufbauen.

Die wesentlichen, für die Sonnenscheindauer verantwortlichen Begebenheiten, sind aber, in vereinfachter Form, jedem als die Entstehung der Jahreszeiten und Zustandekommen von Tag und Nacht bekannt.

Deshalb muss es mit diesen Kenntnissen auch möglich sein, eine vereinfachte, womöglich aber auch ungenaue, Berechnung durchzuführen.

4.2. Verwendete Grundlagen

Um mit der Kenntnis zur Entstehung der Jahreszeiten zu einem Ergebnis zu gelangen, sind viele Vereinfachungen und Annahmen nötig, auf die ich nun genauer eingehen werde. Diese nun folgenden Annahmen spiegeln wahrscheinlich den durchschnittlichen, stark vereinfachten Wissensstand eines Nicht-Astronomen wider und sind teilweise nicht korrekt! Außerdem sind die Jahreszeiten und Betrachtungen der Erde immer auf die nördliche Erdhalbkugel bezogen, um die Situation anschaulicher darstellen zu können.

Entstehung von Tag und Nacht

Ein Tag als Zeiteinheit dauert 24 Stunden und in dieser Zeitspanne dreht sich die Erde einmal um ihre eigene Achse, die durch die Pole geht. Da dabei immer nur eine Halbkugel der Erde von der Sonne beleuchtet wird, unterteilen sich die 24 Stunden in Tag (Sonnenschein) und Nacht (kein Sonnenschein). Das Verhältnis zwischen Tag und Nacht hängt von der Jahreszeit ab.

Entstehung der Jahreszeiten

Wie schon Galileo Galilei bewiesen hatte, dreht sich die Erde um die Sonne. Dies tut sie auf einer kreisförmigen Bahn. Die Umlaufdauer ist uns als ein Jahr bekannt, das im Kalender 365 Tage dauert. Die Ebene des Erdäquators ist allerdings nicht parallel zur gedachten Ebene der Kreisbahn (Ekliptik), sondern steht in einem konstanten Winkel von $23,5^\circ$ dazu. Wenn man diese Ebene als Bezugspunkt nimmt, ist die Nordhalbkugel der Erde ein halbes Jahr lang der

Sonne zugeneigt (Sommer) und ein halbes Jahr von der Sonne weggeneigt (Winter). Die verschiedenen Tageslängen und Jahreszeiten kommen folglich durch den unterschiedlichen Winkel (Deklination), in dem die Erde von der Sonne beleuchtet wird, zustande.

Anhang A 1: Graphische Darstellung der Jahreszeiten

Wichtige astronomische Zeitpunkte

In einem Jahr gibt es vier wichtige astronomische Zeitpunkte:

Datum im Jahr 2004	astronomische Bedeutung	meteorologische Bedeutung
20. März	Tagundnachtgleiche (Äquinoktium)	Frühlingsanfang
21. Juni	längster Tag des Jahres (Solstitium)	Sommeranfang
22. September	Tagundnachtgleiche (Äquinoktium)	Herbstanfang
21. Dezember	kürzester Tag des Jahres (Solstitium)	Winteranfang

Diese Zeitpunkte bestimmen auch die meteorologischen Jahreszeiten, aufgrund der verzögerten Erderwärmung, allerdings um ca. 1,5 Monate verzögert. Diese, für uns gewohnte, Einteilung in vier Jahreszeiten gilt allerdings nur für das Klima unserer Breitengrade.

Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang (Vereinfachung)

Aufgrund der großen Entfernung zwischen Sonne und Erde kann das Sonnenlicht als parallel angenommen werden.

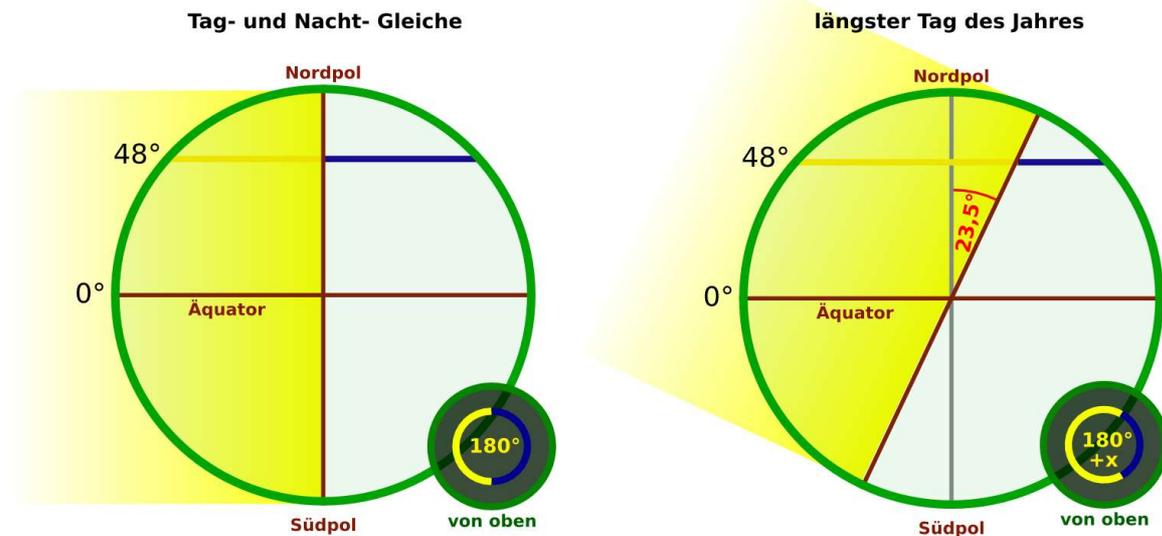
Für die geplante stark vereinfachte Rechnung verwende ich folgende Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang: Die Sonne, die eigentlich als Scheibe am Horizont wahrgenommen wird, gilt dann als aufgegangen, wenn ihr Mittelpunkt den Horizont überschritten hat. Analog dazu der Sonnenuntergang.

Zusammenfassung der vorgenommenen Vereinfachungen:

- Die Erde ist eine Kugel und der Beobachter befindet sich direkt auf deren Oberfläche
- Die Schiefe der Ekliptik beträgt konstante $23,5^\circ$
- Vereinfachte Definition von Sonnenuntergang und Sonnenaufgang als 0° über dem Horizont
- Ein Tag dauert 24 h
- Ein Erdumlauf um die Sonne dauert 365 Tage

4.3. Sonnenscheindauer in Abhängigkeit der Deklination

Zweidimensionale Betrachtung von Tagundnachtgleiche und Solstitium für den 48. Breitengrad (Abb. 4-1)



In der oberen Grafik werden zwei wichtige astronomische Zeitpunkte von der Seite betrachtet: Die Tagundnachtgleiche und der längste Tag des Jahres. Bei der Tagundnachtgleiche mit der Deklination 0° ist die Situation recht einfach, auch ohne Berechnung kann man erkennen, dass genau die Hälfte (180°) des 48. Breitengrades beleuchtet wird. Den beleuchteten Winkel auf dem Breitenkreis nenne ich Tagwinkel. Da dies einer halben Umdrehung um die Erdachse entspricht, beträgt die Sonnenscheindauer also 12 Stunden.

Beim längsten Tag des Jahres hat sich die Situation durch die positive Deklination verändert, so dass jetzt mehr als 180° beleuchtet werden. Dies ist in der Miniatur als $180^\circ + x$ gekennzeichnet. Jetzt dauert der Tag also länger als 12 Stunden. Gesucht ist nun der Tagwinkel für diese Situation, da er das Verhältnis zwischen Tag und Nacht beschreiben kann.

Anhang A2: Dreidimensionale Darstellung des Verfahrens

Der daraus entstandene Rechenweg für die Sonnenscheindauer soll später bei bekannter Deklination auch auf alle anderen Tage angewendet werden können.

Da der gesuchte Tagwinkel μ aus einem 180° Winkel und zwei identischen zusätzlichen Teilen besteht, genügt es, den „Zusatzwinkel“ zu berechnen. Dies kann theoretisch auf zwei Arten geschehen: Mit Hilfe der Sphärischen Trigonometrie oder auch mit elementarer Geometrie. Im Folgenden werde ich den Ansatz mit elementarer Geometrie beschreiben.

Definitionen und Deklarationen

α :="Deklination"

β :="geographische Breite"

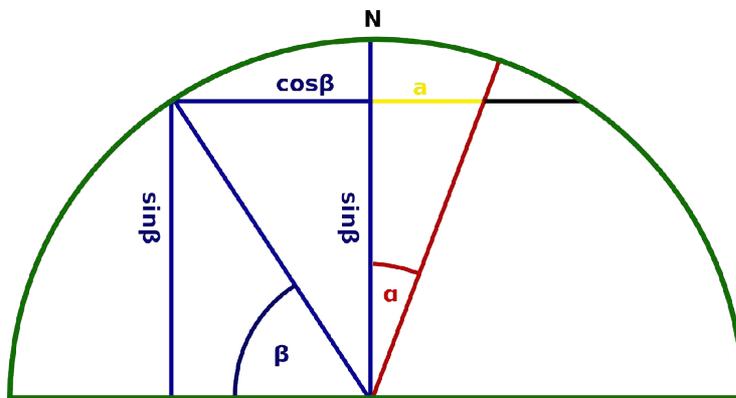
δ :="Zusatzwinkel"

μ :="Tagwinkel"

Bei Betrachtungen der Erde verwende ich einen Einheitskreis, da die Maße unerheblich sind und nur ein Winkel gesucht ist.

Schnitt durch die Erde – Berechnung des Abschnitts a

Bei bekannter Deklination kann der zusätzlich beleuchtete Abschnitt des Breitengrads berechnet werden. Der Abschnitt a, der hier berechnet wird, ist die Projektion des zusätzlich beleuchteten Winkels auf die Schnittfläche:



$$\tan(\alpha) = \frac{a}{\sin(\beta)} \quad | \cdot \sin(\beta)$$

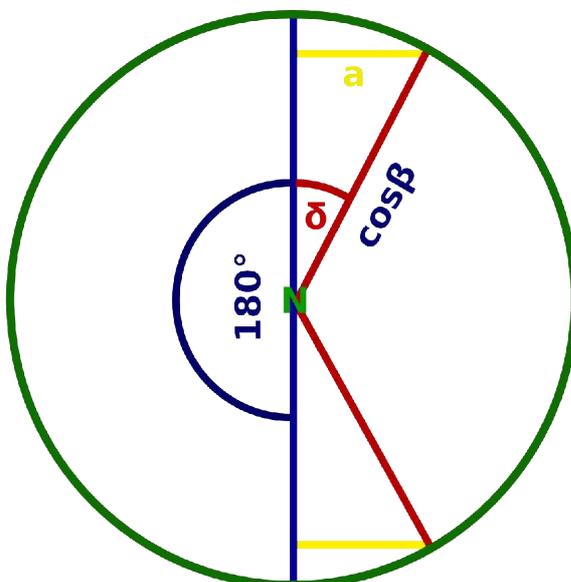
$$\rightarrow a = \tan(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Abb. 4-2:

Schnittebene ist die Ebene eines Längenkreises, der parallel zur Sonneneinstrahlung ist.

Breitenkreis – Umrechnung von a in einen Winkel (Abb. 4-3):

Abgebildet ist der Kleinkreis auf Höhe des gegebenen Breitengrads. Der Radius des Kleinkreises beträgt wie in der Zeichnung ersichtlich $\cos\beta$.



Aus der Zeichnung folgt:

$$\sin(\delta) = \frac{a}{\cos(\beta)}$$

mit $a = \tan(\alpha) \cdot \sin(\beta)$:

$$\sin(\delta) = \frac{\tan(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

$$\sin(\delta) = \tan(\alpha) \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

$$\sin(\delta) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)$$

Bei gegebener Deklination und bekanntem Breitengrad kann also nun der beleuchtete Teil des Breitenkreises als Winkel berechnet werden.

$$\delta = \arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)]$$

einsetzen in $\mu = 2 \cdot \delta + 180^\circ$:

$$\mu = 2 \cdot \arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)] + 180^\circ$$

Rückführung auf die Tageslänge

Der berechnete Teil des Breitengrades muss nun, mit Hilfe der Erdrotation, in eine Zeiteinheit umgerechnet werden. Da bei meinem Rechenweg das Verhältnis zwischen Tag und Nacht berechnet wird, muss zur Berechnung der Tageslänge lediglich der Anteil des beleuchteten Breitengrads von 360° , mit 24 Stunden multipliziert werden.

$$t(\mu) = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h}$$

$$t(\alpha, \beta) = \frac{2 \cdot \arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)] + 180^\circ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h}$$

$$t(\alpha, \beta) = \{2 \cdot \arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)] + 180^\circ\} \cdot \frac{24 \text{ h}}{360^\circ}$$

Definitionsmenge

Einschränkung der Definitionsmenge aufgrund der Tangens:

$$\tan(\alpha) \rightarrow \alpha \neq k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{N} \quad \text{immer erfüllt, da } |\alpha| \leq 23,5^\circ$$

$$\tan(\beta) \rightarrow \beta \neq k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{N} \quad \text{erfüllt für alle geogr. Breiten, ausser Nord- und Südpol}$$

Einschränkung der Definitionsmenge aufgrund des Arcussinus:

$\arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)]$ ist nicht definiert für:

$$\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) < -1 \quad \text{und} \quad \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) > 1$$

Für diese beiden Definitionslücken sollte sich eigentlich ein Zusatzwinkel ergeben, der im Betrag größer als 90° ist. Die Sonnenscheindauer kann aber nur Werte zwischen 0 und 24 einnehmen.

Es ist also eine Fallunterscheidung für die Sonnenscheindauer $s(x)$ notwendig:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) < -1 \\ t(\alpha, \beta) & \text{für } \alpha, \beta \in D_f \\ 24 & \text{für } \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) > 1 \end{cases}$$

Mit dieser Formel kann man jetzt die theoretische Sonnenscheindauer für einen bestimmten Breitengrad berechnen, falls die Deklination bekannt ist.

4.4. Vorläufige Ergebnisse

Da aus der vorhergehenden Betrachtung der Jahreszeiten für vier Zeitpunkte im Jahr die Deklination festgelegt ist, soll mit diesen Werten die Tageslänge berechnet werden.

Beim Einsetzen der Werte in die vorher entstandene Formel ergeben sich folgende Werte:

Beispiel Wasserburg, geographische Breite $\beta = 48^\circ$

Zeitpunkt	Deklination α	Tagwinkel δ	Sonnenscheindauer
Frühlingsanfang	0°	180°	12 h
Sommeranfang (längster Tag)	$23,5^\circ$	$237,8^\circ$	15,85 h
Herbstanfang	0°	180°	12 h
Winteranfang (kürzester Tag)	$-23,5^\circ$	$122,2^\circ$	8,15 h

Beispiel Oslo, geographische Breite $\beta = 60^\circ$:

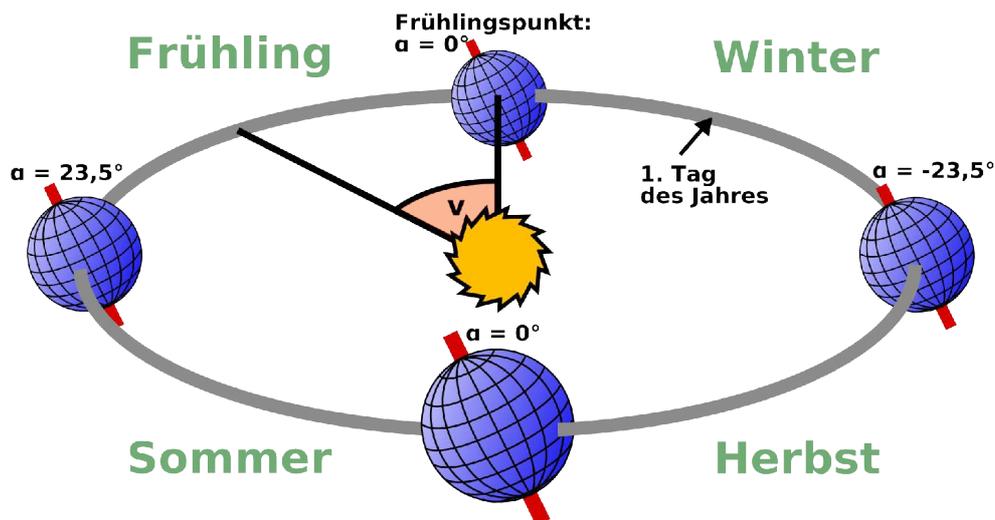
Zeitpunkt	Deklination α	Tagwinkel δ	Sonnenscheindauer
Frühlingsanfang	0°	180°	12 h
Sommeranfang (längster Tag)	$23,5^\circ$	$277,7^\circ$	18,51 h
Herbstanfang	0°	180°	12 h
Winteranfang (kürzester Tag)	$-23,5^\circ$	$82,3^\circ$	5,49 h

Beispiel Brasilia, geographische Breite $\beta = -16^\circ$:

Zeitpunkt	Deklination α	Tagwinkel δ	Sonnenscheindauer
Frühlingsanfang	0°	180°	12 h
Sommeranfang (längster Tag)	$23,5^\circ$	$165,7^\circ$	11,05 h
Herbstanfang	0°	180°	12 h
Winteranfang (kürzester Tag)	$-23,5^\circ$	$194,3^\circ$	12,95 h

4.5. Berechnung der Deklination

Vereinfacht gesehen beschreibt die Erde eine Kreisbahn um die Sonne, mit der Umlaufzeit eines Jahres. Da die Äquatorialebene der Erde mit der Kreisbahnebene einen Winkel von 23,5 Grad einschließt, wird die Erde, wie bereits beschrieben, einmal von oben und einmal von unten beschienen, je nach Jahreszeit. Der Winkel zwischen den beiden Ebenen wird als „Schiefe der Ekliptik“ bezeichnet. In den folgenden Berechnungen kommt er als ϵ vor.



Der Verlauf zwischen den besagten $-23,5^\circ$ ($-\epsilon$) und $+23,5^\circ$ ($+\epsilon$) ist aufgrund der Kreisbahn eine harmonische Schwingung. Um den Sinus verwenden zu können, muss ein Positionswinkel der Erde auf dieser Kreisbahn definiert werden. Da die Deklination α im Frühlingspunkt 0° beträgt, setze ich diesen Zeitpunkt als 0° bzw. 360° des Positionswinkels, da der Sinus von 0° den Wert 0 ergibt.

Daraus entsteht eine Formel für die Deklination in Abhängigkeit des Positionswinkels ν :

$$\alpha = \sin(\nu) \cdot \epsilon$$

Berechnung des Positionswinkels

Um den Positionswinkel für jeden Tag berechnen zu können, muss noch folgende Überlegung stattfinden:

Wenn die Erde sich 365 Tage vom Frühlingspunkt entfernt, läuft der Positionswinkel von 0° auf 360° . Die Winkelgeschwindigkeit beträgt also 360° in 365 Tagen:

$$\omega_{\text{jahr}} = \frac{360^\circ}{365 \text{ d}}$$

Wenn man nun den Positionswinkel für einen bestimmten Tag sucht, muss man nur noch die Anzahl der vergangenen Tage nach dem Frühlingspunkt mit dieser Winkelgeschwindigkeit multiplizieren.

Wieviele Tage seit dem Frühlingspunkt vergangen sind, kann aus dem Kalender abgelesen werden. Um aber eine Berechnung für die Sonnenscheindauer im Jahresverlauf durchführen zu können, wird diese Überlegung in die Formel integriert.

Der Einfachheit halber werde ich die Zeitpunkte als natürliche Zahlen („x-ter Tag des Jahres“) angeben. Der Frühlingspunkt war im Jahr 2004 der 80. Tag des Jahres.

Für den Positionswinkel des x-ten Tag im Jahr ergibt sich also folgende Gleichung:

$$\omega_{\text{jahr}} = \frac{\nu}{x - a} \quad \text{und} \quad \omega_{\text{jahr}} = \frac{360^\circ}{365 \text{ d}} \quad (x - a) \text{ ist die Anzahl der vergangenen Tage seit dem Frühlingspunkt}$$

$$\frac{\nu}{x - a} = \frac{360^\circ}{365 \text{ d}} \quad | \cdot (x - a)$$

$$\nu = \frac{360^\circ}{365 \text{ d}} \cdot (x - a)$$

$$\nu = 360^\circ \cdot \frac{x - a}{365 \text{ d}}$$

Diese Gleichung für den Positionswinkel ν setzt man nun in die erste Gleichung für die Deklination ein:

$$\alpha = \sin(\nu) \cdot \epsilon$$

$$\alpha = \sin\left(360^\circ \cdot \frac{x - a}{365 \text{ d}}\right) \cdot \epsilon$$

Bei dieser Gleichung für die Deklination ist jedoch zu beachten, dass nur mit ganzen Tagen gerechnet wird und sich deshalb Ungenauigkeiten ergeben können. Außerdem muss immer der passende Frühlingspunkt aus dem Kalender benutzt werden, da sich dieser jedes Jahr ändert. Für eine genauere Berechnung wäre der exakte Zeitpunkt des Frühlingspunktes notwendig, der explizit berechnet werden muss.

Einsetzen der Deklination in die Gleichung der Sonnenscheindauer

$$t(\alpha, \beta) = \{2 \cdot \arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)] + 180^\circ\} \cdot \frac{24 \text{ h}}{360^\circ}$$

$$t(\alpha, \beta) = \{\arcsin[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)] + 90^\circ\} \cdot \frac{24 \text{ h}}{180^\circ}$$

$$\text{mit } \alpha = \sin\left(360^\circ \cdot \frac{x - a}{365 \text{ d}}\right) \cdot \epsilon \quad :$$

$$t(x, \beta) = \{\arcsin[\tan(\sin\left(360^\circ \cdot \frac{x - a}{365 \text{ d}}\right) \cdot \epsilon) \cdot \tan(\beta)] + 90^\circ\} \cdot \frac{24 \text{ h}}{180^\circ}$$

Die Fallunterscheidung aufgrund der Definitionslücken muss analog zur ausgeführten Fallunterscheidung $s(x)$ getroffen werden!

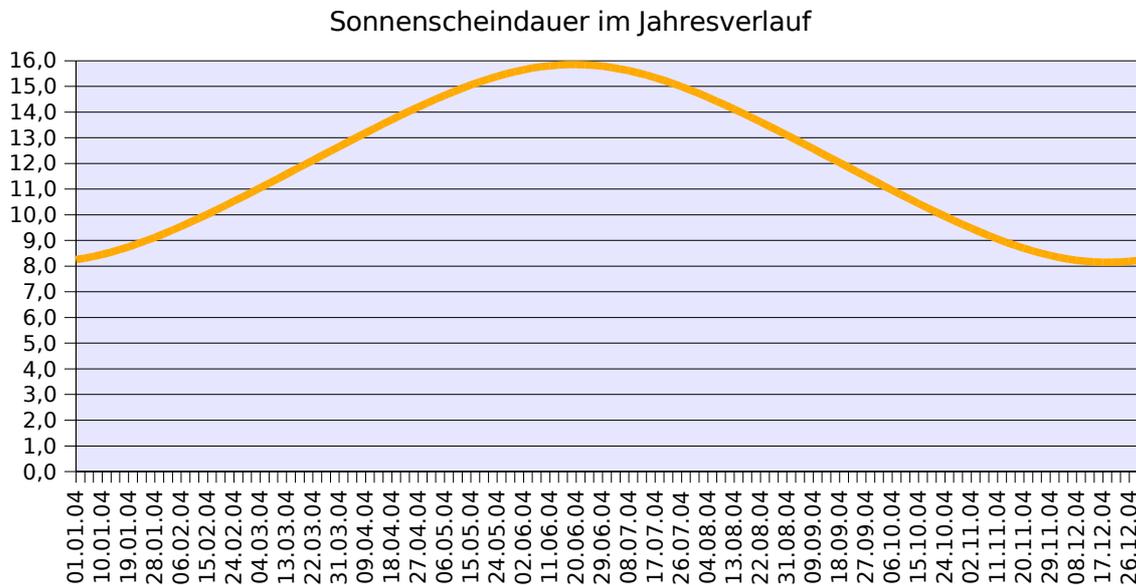
Damit habe ich eine Gleichung erhalten, mit der ich für einen bestimmten Tag und eine bestimmte geographische Breite die Sonnenscheindauer berechnen kann. Voraussetzung dafür ist allerdings die Kenntnis der Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt.

4.6. Ergebnisse der gefundenen Formel

Beispiel Wasserburg

Um die Ergebnisse der erarbeiteten Formel überprüfen und darstellen zu können, habe ich sie mit der geographischen Breite von Wasserburg in ein Tabellenkalkulations-Programm eingesetzt:

$$\beta = 48^\circ; a = 80; \epsilon = 23,5^\circ;$$

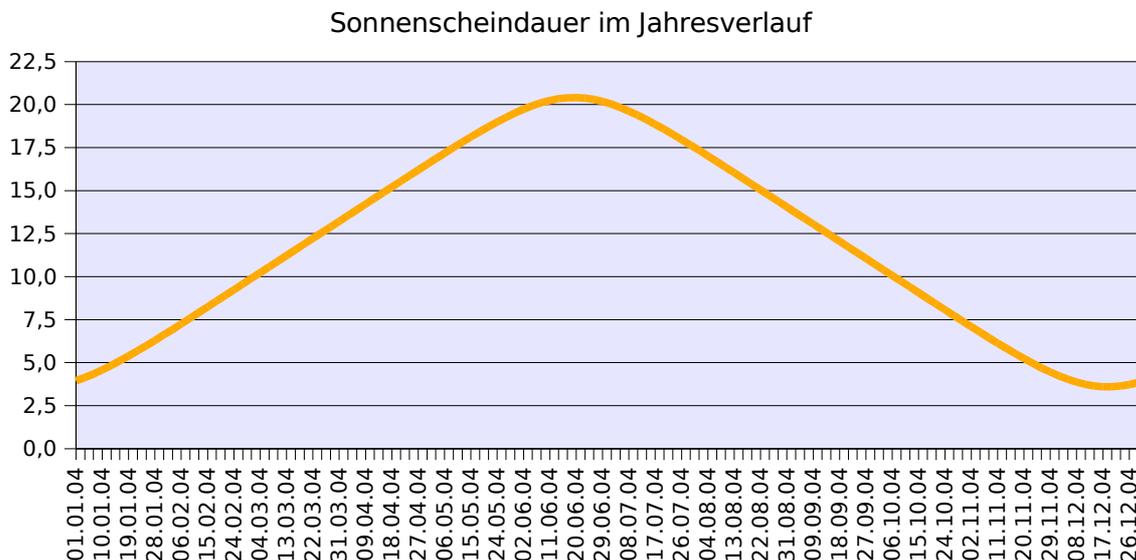


Es ergibt sich ein annähernd sinusförmiger Verlauf der Sonnenscheindauer, mit der vorher bereits berechneten Amplitude. Die Steigung ist jeweils am kürzesten und längsten Tag minimal.

Die subjektive Korrektheit der Formel soll nun anhand zweier Beispiele auch für andere Positionen auf der Erde überprüft werden:

Beispiel Island

$$\beta = 64^\circ; a = 80; \epsilon = 23,5^\circ;$$

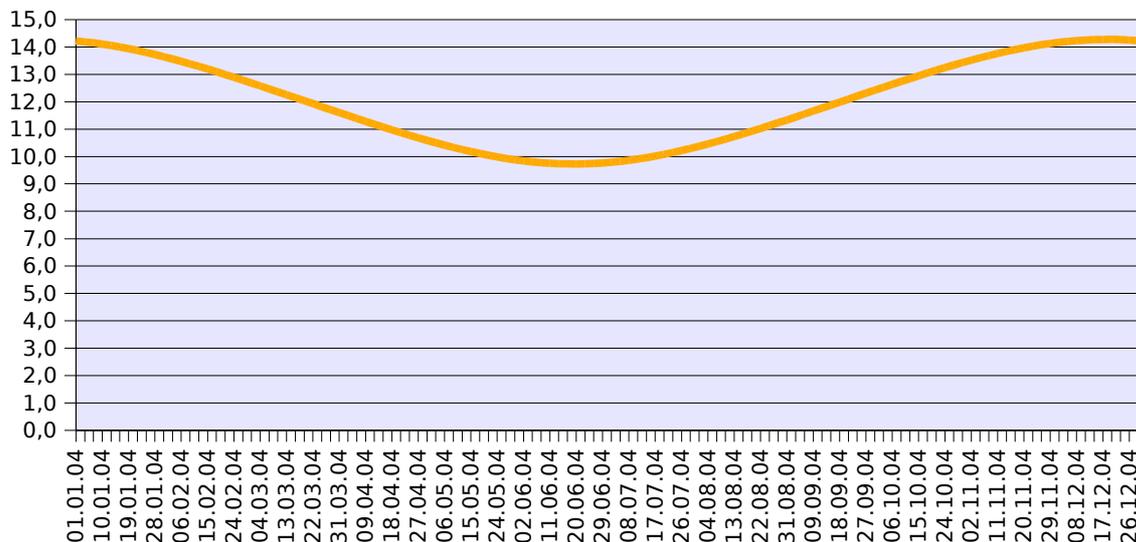


Neben einer beträchtlichen Amplitude von knapp 17 Stunden (20,41-3,59) zeigt sich ein nahezu linearer Verlauf der Sonnenscheindauer zwischen den Solstitien. Der sinusförmige Umschwung am längsten und kürzesten Tag ist mit einer hohen Krümmung versehen.

Beispiel Sydney

$\beta = -34^\circ$; $a = 80$; $\varepsilon = 23,5^\circ$;

Sonnenscheindauer im Jahresverlauf



Wie erwartet zeigt sich auf der Südhalbkugel ein umgekehrtes Bild, der längste Tag des Jahres ist hier im Dezember. Ansonsten ist eine charakteristische Sinusform erkennbar, ähnlich wie beim Verlauf der Sonnenscheindauer in Wasserburg, lediglich mit einer geringeren Amplitude von ca. 4,5 Stunden.

4.7. Vergleich mit komplexen Berechnungsmethoden

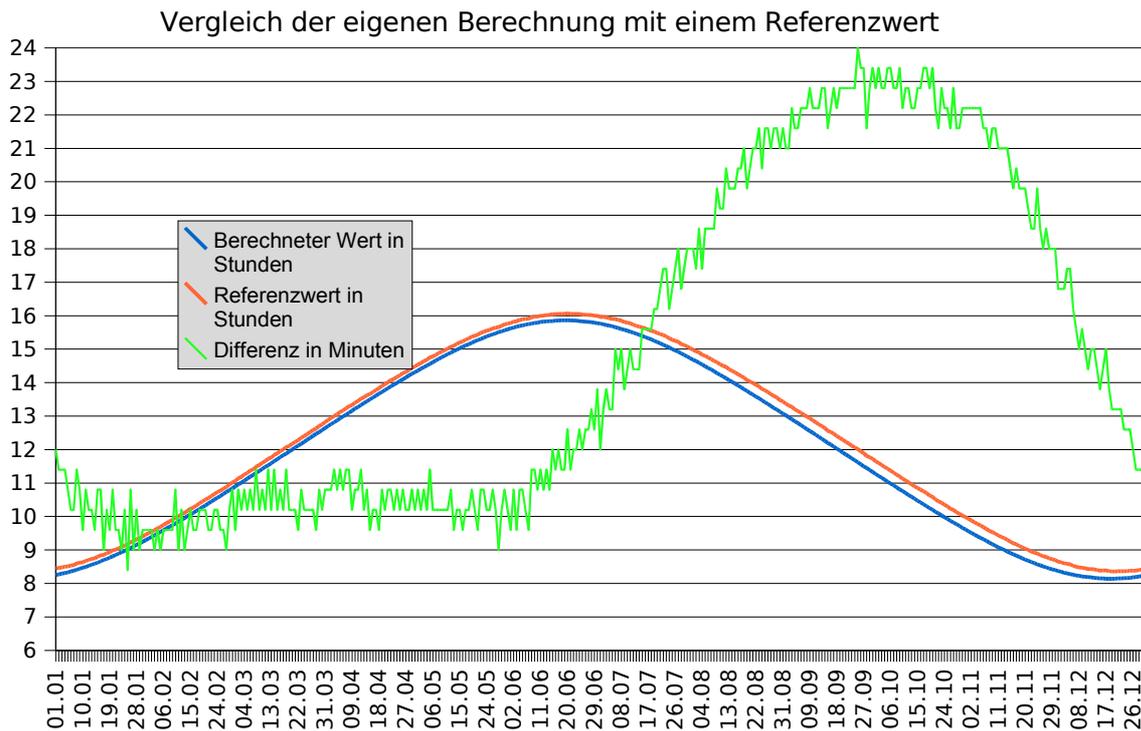
Um meine vergleichsweise einfachen Berechnungen mit denen komplizierterer Art zu vergleichen, benutze ich geeignete Daten aus dem Internet als Referenz.

Auf der Internet-Seite des „Astronomical Applications Department“⁷ des „U.S. Naval Observatory“ kann man nach der Eingabe seiner GPS-Koordinaten eine komplette Tabelle mit allen Sonnenaufgangs- und Sonnenuntergangszeiten für ein ganzes Jahr berechnen lassen. Das Rechenverfahren basiert auf den anerkannten „Astronomischen Algorithmen“ von Jean Meeus.

Ich habe zum Vergleich mit meiner Berechnung die selben Parameter verwendet und die Aufgangs- und Untergangszeiten in die Sonnenscheindauer umgerechnet:

⁷ U.S. Naval Observatory: Data Services, Internetseite
http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.html, aufgerufen am 20.12.2004 (s. Anhang C 3)

$$\beta = 48^\circ$$



Die grüne Linie stellt die Differenz der beiden Graphen dar, zum besseren Ablesen in Minuten angegeben. Die Schwankungen der grünen Linie um ± 1 Minute sind auf Rundungsfehler der Referenzwerte zurückzuführen, da diese Werte nur auf eine Minute genau angegeben waren.

Auf den ersten Blick ist erkennbar, dass der Graph meiner Funktion immer unterhalb des Referenz-Graphen bleibt. Die Abweichung (grüne Linie) bewegt sich im ersten Halbjahr relativ konstant bei 10 Minuten, im zweiten Halbjahr steigt sie jedoch bis auf ihr Maximum von 23 Minuten an. Insgesamt ergibt sich damit eine Standardabweichung von 15,6 Minuten.

4.8. Gründe für die Abweichung

Getrennte Betrachtung der Fehler

Bei der Suche nach den Gründen für die Abweichung, können die Fehler getrennt betrachtet werden:

Fehler 1: Die konstant zu niedrigen Werte.

Diese Abweichung muss aus der 1. Formel der Sonnenscheindauer bei bekannter Deklination entstanden sein, denn bei den Solstitionen sind die Werte abweichend, obwohl dort die Deklination ($-23,5$ und $+23,5$) stimmt.

Fehler 2: Die Verschiebung auf der x-Achse und Abweichung im Verlauf

Dieser Fehler muss von der 2. Formel für die Deklination herrühren, da sie Startpunkt und Art des Verlaufs festlegt.

Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang

In der ersten Formel steckt eine große Vereinfachung, nämlich die Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang als 0° über dem Horizont.

Um die Unterschiede (Fehler 1) erklären zu können, betrachte ich zuerst die Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang der Referenz:

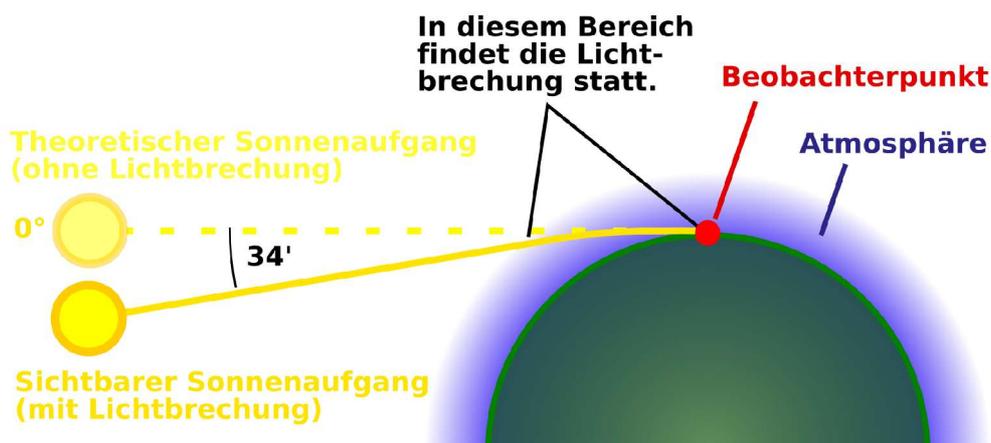
„For computational purposes, sunrise or sunset is defined to occur when the geometric zenith distance of center of the Sun is 90.8333 degrees.“⁸

In dieser Berechnung gilt die Sonne also als aufgegangen, wenn sie $0,8333^\circ$ unter dem Horizont steht. Dies wird durch folgende Faktoren begründet:

„The 50-arcminute geometric depression of the Sun's center used for the computations is obtained by adding the average apparent radius of the Sun (16 arcminutes) to the average amount of atmospheric refraction at the horizon (34 arcminutes).“⁹

Der Winkel von $50'$ kommt also zu einem Teil ($16'$) durch die Größe der Sonne zustande, die als Scheibe wahrgenommen wird.

Wesentlich größeren Anteil ($34'$) hat jedoch die Atmosphärische Brechung der Sonnenstrahlen. Ähnlich wie die Lichtbrechung durch das Wasser eines Sees, bricht die Atmosphäre der Erde das aus dem Vakuum eintreffende Sonnenlicht zur Erde hin. „[Ein] Stern, der scheinbar gerade untergeht, steht also in Wirklichkeit bereits über einen halben Grad unter dem Horizont“¹⁰. Einen Einfluss auf die Brechzahl der Erdatmosphäre hat die „vertikale Schichtung der Atmosphäre“¹¹, die „außerdem noch von Luftdruck und Lufttemperatur“¹² abhängt. Da dies schwer zu berechnen ist, wird allgemein bei Berechnungen (siehe Referenz) ein Mittelwert von $34'$ als Pauschalbetrag verwendet.



8 U.S. Naval Observatory: Rise, Set, and Twilight Definitions, Internetseite

http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/RST_defs.html, aufgerufen am 22.12.2004 (s. Anhang C 4)

9 U.S. Naval Observatory: Rise, Set, and Twilight Definitions; a.a.O

10 Günter Dietmar Roth: Handbuch für Sternfreunde – Wegweiser für die praktische astronomische Arbeit; Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960, Seite 116

11 Günter Dietmar Roth: Handbuch für Sternfreunde; a.a.O Seite 116

12 Günter Dietmar Roth: Handbuch für Sternfreunde; a.a.O Seite 116

Wie in der vorherigen Grafik dargestellt, ist die Lichtbrechung in der Atmosphäre kein scharfer Knick, sondern eine Art „Biegung“ der Sonnenstrahlen. Diese Sonderform der Brechung kommt zustande, da unsere Atmosphäre in hohen Schichten optisch dünner ist als in den erdnahen Schichten.

Die Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, als 50' unter dem Horizont, hat also wahrscheinlich den Fehler 1 verursacht.

Schiefe der Ekliptik als mögliche Fehlerursache

Wie bei der Durchführung der Berechnung erwähnt, wurde bei der Schiefe der Ekliptik ein ungefährender Wert von 23,5° verwendet. Tatsächlich ist dieser Wert nicht einmal konstant. Die Erdachse rotiert nämlich nicht um eine raumfeste Achse, sondern sie führt zusätzlich sogenannte Präzessions- und Nutationsbewegungen aus, sie torkelt also wie ein Kreisel.

„Die Schiefe der Ekliptik beträgt derzeit 23.44 Grad. Sie ändert sich jedoch langperiodisch, weil kleine Gravitationseinflüsse aus dem Sonnensystem an der nicht ganz kugelförmigen Erde angreifen. Daher variiert ϵ innert 40.000 Jahren zwischen etwa 21°55' und 24°18'.“¹³

Tabelle der Ekliptikschiefe -3000 bis +3000¹⁴

-3000	24°01.6'	0	23°41.7'	+1600	23°29.5'
-2500	23°58.7'	+500	23°38.0'	+1700	23°28.7'
-2000	23°55.6'	+1000	23°34.1'	+1800	23°27.9'
-1500	23°52.4'	+1500	23°30.3'	+1900	23°27.1'
-1000	23°49.0'	+2000	23°26.4'	+2000	23°26.4'
- 500	23°45.4'	+2500	23°22.5'	+2100	23°25.6'
0	23°41.7'	+3000	23°18.6'	+2200	23°24.8'

Für meine Berechnungen genügt trotz dieser Schwankungen ein konstanter Wert, da sie sich innerhalb kurzer Zeiträume abspielen. Dies ist also nicht für die Abweichungen verantwortlich. Trotzdem werde ich in allen nun folgenden Berechnungen einen genaueren aktuellen Wert (23,44°) verwenden, was zu einer marginal kleineren Amplitude der Sonnenscheindauer führen wird.

Deklination

Die Abweichungen im Verlauf der Sonnenscheindauer resultieren aus meiner stark vereinfachten Berechnung der Deklination. Hier kommt wahrscheinlich zum Tragen, dass die Erde keine ideale Kreisbahn beschreibt, sondern eine elliptische Bahn. Dies hat nämlich zur Folge, dass die Bahngeschwindigkeit nicht konstant ist. Im Winter, wenn die Erde der Sonne am nächsten ist, hat sie eine höhere Bahngeschwindigkeit als im Sommer, wenn sie den größten Abstand zur Sonne hat.

¹³ Artikel „Schiefe der Ekliptik“, Wikipedia; Internetseite http://de.wikipedia.org/wiki/Schiefe_der_Ekliptik, aufgerufen am 15.01.05 (s. Anhang C 5)

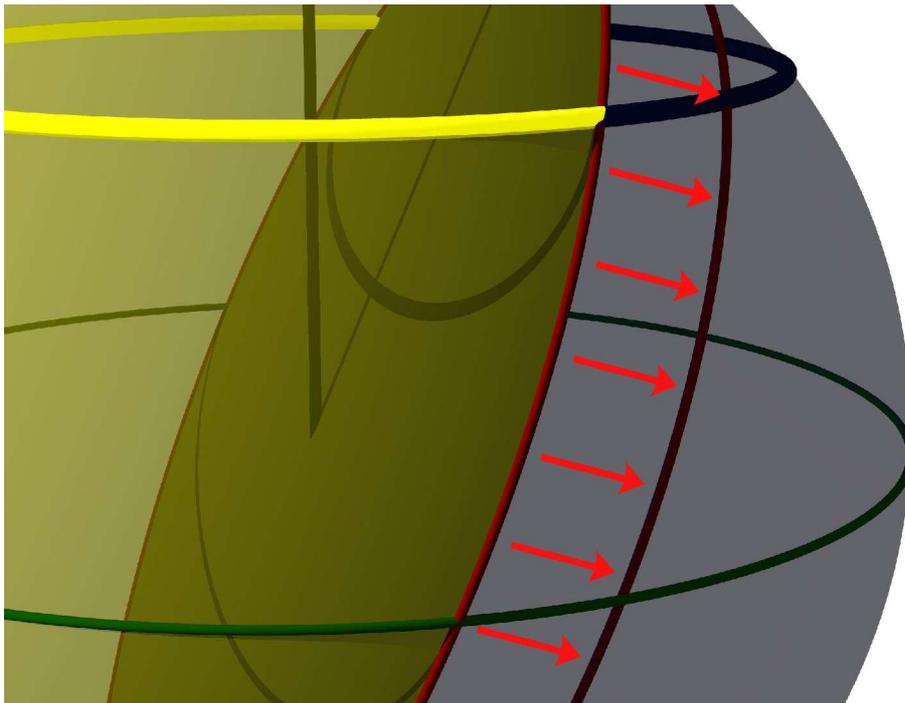
¹⁴ vgl. Artikel „Schiefe der Ekliptik“, Wikipedia; a.a.O

4.9. Optimierung der Berechnung

Neue Definition für die Formel der Sonnenscheindauer

Bei der Verbesserung meiner Berechnung geht es nun vor allem darum, die neue Definition für Sonnenauf- bzw. -untergang einzufügen, da dies die größte Abweichung von anderen Berechnungen verursacht hat. Dabei wird auch gleich der größte Nachteil meiner Berechnungsmethode deutlich, denn ich verwendete keine Kugelgeometrie, bei der man einfach die bekannten $0,833^\circ$ zum Lauf der Sonne über dem Horizont hinzufügen könnte. Der Tagwinkel auf dem meine Berechnung basiert, ist ja lediglich der Mittelpunktswinkel eines Breitenkreises, bei dem dieser Korrekturwinkel dann in einem anderen Verhältnis eingehen muss.

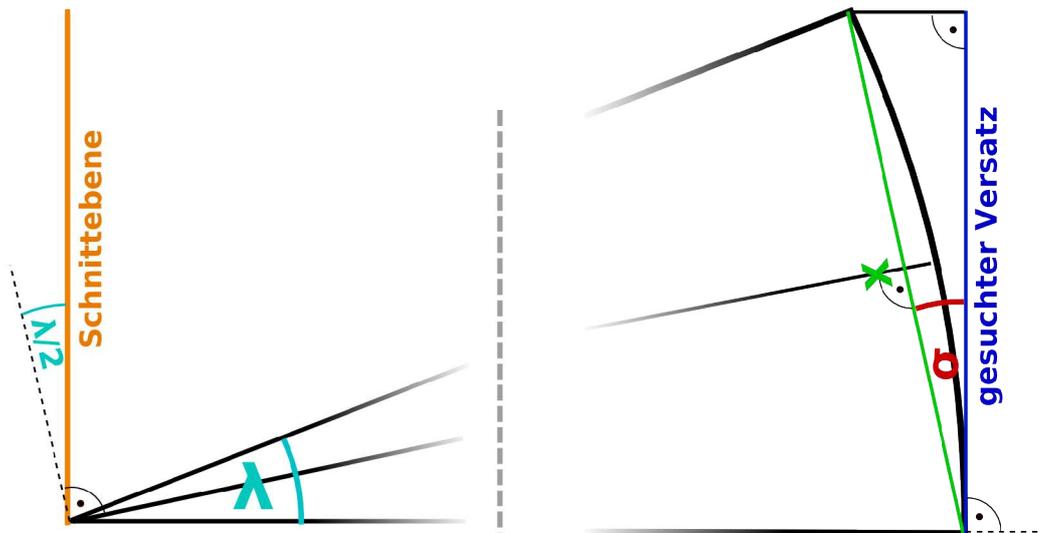
Die neue Definition betrifft die zuallererst aufgestellte Überlegung, dass immer exakt eine Halbkugel der Erde beleuchtet wird. Dies ändert sich nun dahingehend, dass sich die Grenze zwischen Tag und Nacht um den sphärischen Abstand von $50'$ von der Sonne weg verschiebt:



Damit ich mit dieser Information wieder auf die Sonnenscheindauer schließen kann, muss es möglich sein, den in der ersten Berechnung verwendeten Abschnitt a um das entsprechende Stück zu verlängern.

Projektion des sphärischen Abstand von 50' auf die Schnittebene

$\lambda :=$ "Definition von Sonnenaufgang/Sonnenuntergang" = 50'



Aus der Zeichnung folgt für den Winkel σ :

$$\sigma = \frac{\lambda}{2}$$

Die Länge der Sehne x kann mit dem Winkel λ bestimmt werden:

$$\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{x/2}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

(Der Radius des Kreises beträgt 1)

Mit der Sehnenlänge x und σ kann der gesuchte Versatz v berechnet werden:

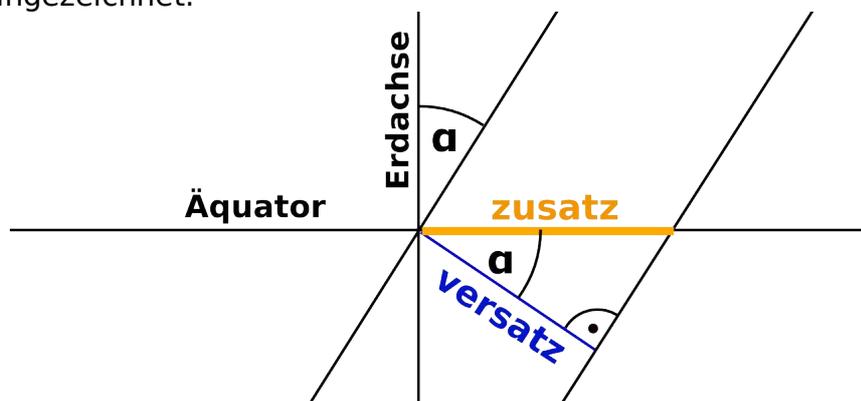
$$\cos(\sigma) = \frac{v}{x}$$

$$v = \cos(\sigma) \cdot x$$

$$\text{mit } \sigma = \lambda/2 \text{ und } x = 2 \cdot \sin(\lambda/2) :$$

$$v = \cos(\lambda/2) \cdot 2 \cdot \sin(\lambda/2)$$

Dieser berechnete Abstand der beiden Ebenen, muss nun noch in die Richtung des Abschnitts a gebracht werden. Da dieser Versatz auf jedem Breitengrad der Erde gleich groß sein muss, habe ich ihn zum besseren Verständnis am Äquator eingezeichnet.



Aus der Zeichnung folgt der Zusatz z:

$$\cos(\alpha) = \frac{v}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{v}{\cos(\alpha)}$$

mit $v = 2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)$:

$$z = \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha)}$$

Berechnung des neuen Zusatzwinkels δ_{neu} , der Zusatz z verlängert dabei den Abschnitt a aus der alten Berechnung.

$$\sin(\delta_{\text{alt}}) = \frac{a}{\cos(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\delta_{\text{neu}}) = \frac{a + z}{\cos(\beta)}$$

mit $a = \tan(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ und $z = \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha)}$:

$$\sin(\delta_{\text{neu}}) = \frac{\tan(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha)}}{\cos(\beta)}$$

Rückführung von δ_{neu} auf den Tagwinkel μ_{neu} mit Hilfe der alten Berechnung

$$\mu_{\text{alt}} = 2 \cdot \delta_{\text{alt}} + 180^\circ$$

$$\mu_{\text{neu}} = 2 \cdot \arcsin \left[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right] + 180^\circ$$

Einsetzen von μ_{neu} in die Formel der Sonnenscheindauer

$$t(\mu) = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h}$$

$$t_{\text{neu}}(\alpha, \beta) = \frac{2 \cdot \arcsin \left[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right] + 180^\circ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h}$$

$$t_{\text{neu}}(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{360^\circ} \cdot \arcsin \left[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right] + \frac{180^\circ}{360^\circ} \right) \cdot 24 \text{ h}$$

$$t_{\text{neu}}(\alpha, \beta) = \frac{2 \cdot 24 \text{ h}}{360^\circ} \cdot \arcsin \left[\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \frac{2 \cdot \sin(\lambda/2) \cdot \cos(\lambda/2)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} \right] + 12 \text{ h}$$

Die zur Fallunterscheidung führende Definitionsmenge gestaltet sich analog zur ersten Version der Formel!

In diese Formel muss nun lediglich bei α die Formel zur Deklination und bei λ der festgelegte Untergangswinkel von 50' eingesetzt werden. Zur besseren Übersichtlichkeit werde ich dies aber hier nicht durchführen, sondern erst in der Tabellenkalkulation.

4.10. Ergebnisse der optimierten Berechnung

Überprüfung der Formel der Sonnenscheindauer (Version 2)

Die quantitative Korrektheit dieser Ergebnisse soll nun unabhängig von den möglichen Fehlern der Deklinationsgleichung überprüft werden. Dazu verwende ich die Minima und Maxima der Deklination. Winkel ϵ ist bei der Berechnung Version 2 $23,44^\circ$.

für $\beta = 48^\circ$:

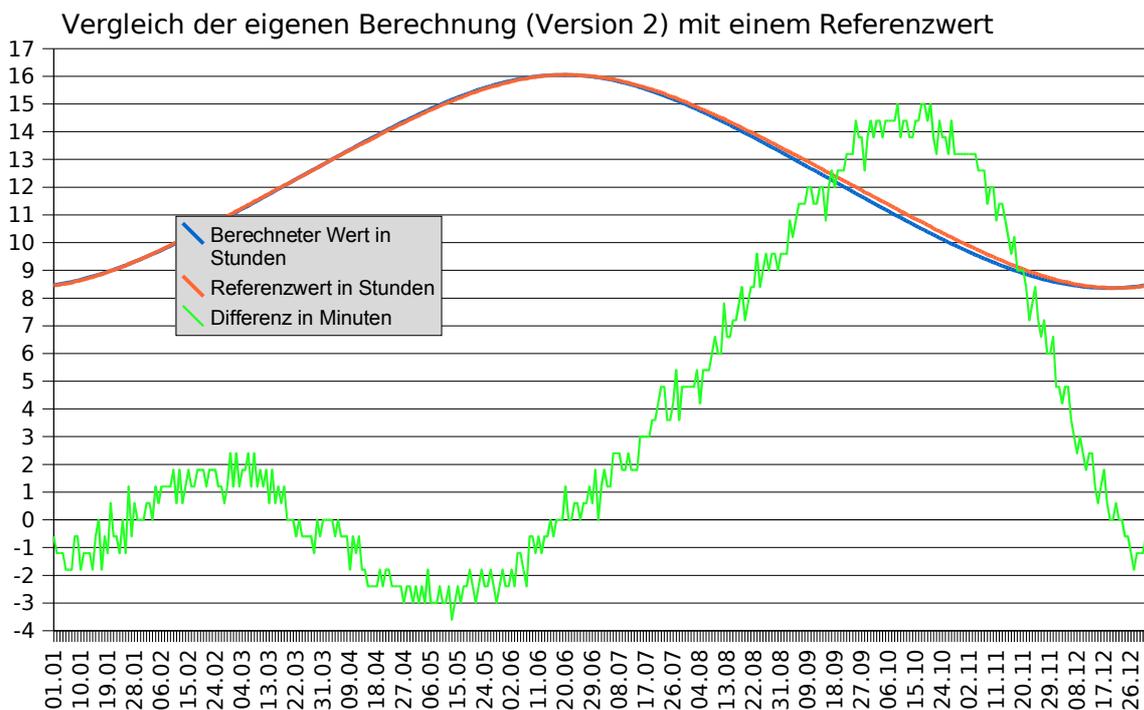
	eigene Berechnung (Version 1)	eigene Berechnung (Version 2)	Referenz (auf eine Minute genau)
längster Tag	15:51:00	16:02:46	16:03:00
kürzester Tag	08:09:00	08:22:01	08:22:00

Ein beliebig gewählter anderer Ort, hier $\beta = -12^\circ$

	eigene Berechnung (Version 1)	eigene Berechnung (Version 2)	Referenz (auf eine Minute genau)
längster Tag	12:42:25	12:49:46	12:50:00
kürzester Tag	11:17:35	11:25:09	11:25:00

Bereits diese beiden Beispiele zeigen, dass die neue Definition von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang zu einer Zunahme der Sonnenscheindauer um 7-15 Minuten führt. Im Vergleich mit der Referenz, die ja die selbe Definition verwendet, können nach Rundung identische Ergebnisse verzeichnet werden. Die Formel zur Sonnenscheindauer (Version 2) entspricht in ihren Ergebnissen offensichtlich denen anderer Berechnungen.

Ergebnisse der Berechnung (Version 2) im Jahresverlauf



Der erneute Vergleich mit der Referenz zeigt ebenfalls signifikante Verbesserungen:

- Die neu berechnete Standardabweichung beträgt nur mehr 6,7 Minuten
- Im ersten Halbjahr liegen die Abweichungen bei ca. ± 2 Minuten

Trotzdem steigt die Abweichung zum Herbst stark an, meine Berechnung liegt Mitte Oktober um 15 Minuten unter der Referenz. Hier zeigt sich der Einfluss der ungenauen Berechnung der Deklination. Ab dem Sommer verändert sich die Deklination in Wahrheit etwas langsamer, da die Erde hier den größten Abstand zur Sonne hat und ihre Bahngeschwindigkeit infolge der 2. Keplerschen Regel geringer ist.

Für eine Tabelle der neuen Werte betrachten Sie bitte Anhang A 3

5. Zusatz

5.1. Erstellung der dreidimensionalen Grafiken

Verwendete Programme

Alle 3D-Grafiken wurden mit dem Raytracer POV-Ray gerendert. Raytracing (zu deutsch "Strahlverfolgung") ist ein Rechenverfahren, bei dem jedes von einem virtuellen Auge sichtbare Pixel, auf dem Strahlenweg zurückverfolgt wird und der zugehörige Farbwert einzeln berechnet wird. Dabei können alle optischen Effekte berechnet werden, wie z.B. Refraktion.

Dem Renderer (existiert für alle unterschiedlichen Betriebssysteme) wird dabei nur eine Textdatei übergeben, in der mittels einer speziellen Beschreibungssprache, die komplette Szene geschildert ist. Nach einem rechenintensiven Prozess wird dann die fertige Bilddatei gespeichert.

Zur Erstellung der Textdateien verwendete ich zusätzlich das Programm Kpov-Modeler unter Linux.

Grafik zu den Jahreszeiten

Für die dreidimensionale Erde habe ich eine Kugel mit Texturen überzogen. Dazu wurden folgende Texturen¹⁵ verwendet:

1. Textur mit den natürlichen Farben der Erdoberfläche
2. Höhenkarte der Erde zur Erzeugung eines leichten Reliefs
3. Halbtransparente Textur als künstliche Atmosphäre
4. Teilweise transparente Wolkentextur

Diese Kugel wurde sodann im jeweiligen Winkel beleuchtet.

Der komplette Quellcode der Szene befindet sich im Anhang B 1

¹⁵ Tor Oera: Texture maps, Internetseite <http://www.oera.net/How2/TextureMaps.htm>, aufgerufen am 7.11.2004 (siehe Anhang C 6)

Grafiken zur dreidimensionalen Erläuterung des Rechenwegs

Diese 3D-Szenen bestehen meist aus mehreren Torus-Körpern, die die Breitenkreise markieren. Für den verschiedenfarbigen 48. Breitengrad wurden zwei Schnittmengen mit einem Zylinder eingesetzt. Bei der ersten Grafik im Anhang A 2 wurde zusätzlich eine halbtransparente Kugeloberfläche und ein Zylinder als Lichtquelle verwendet.

Quellcodes der Grafiken sind im Anhang B 2

5.2. Die Facharbeit als Internetseite

Die Facharbeit kann im Internet unter folgender Adresse eingesehen werden:

www.sonnenscheindauer.de

Dort befindet sich auch eine druckfähige PDF-Datei zum Herunterladen.

5.3. Online-Berechnung der Sonnenscheindauer

Auf der vorher erwähnten Internetseite wurde außerdem eine Online-Berechnung der Sonnenscheindauer (Meine Berechnung Version 2) implementiert. Nach Auswahl der geographischen Koordinaten wird die aktuelle Sonnenscheindauer und ein Graph des Jahresverlaufs angezeigt.

Die Berechnung erfolgt serverseitig mit dynamischen PHP-Seiten. Zum Zeichnen der Graphen wurde die PHP-Bibliothek JpGraph verwendet.

Der Quellcode der Berechnung befindet sich im Anhang B 3.

5.4. Verwendete Programme

Alle von mir zur Facharbeit verwendeten Programme sind Opensource-Projekte oder andere „Freeware“! Damit ist dies eine der sicher sehr seltenen Facharbeiten, die ohne Microsoft-Raubkopien erstellt wurden!

Die wichtigsten Programme:

	Betriebssystem: SuSE Linux 9.1 – Kernel 2.6 – KDE 3.3.1
	OpenOffice.org Writer - Textverarbeitung OpenOffice.org Calc – Tabellenkalkulation OpenOffice.org Math – Formeleditor
The Gimp 2.0	Dieses leistungsfähige Bildbearbeitungsprogramm gilt oft als Vorzeigeprojekt der Opensource-Idee.
Inkscape 0.39	Alle Grafiken, die ohne Quellenangaben vorkommen, wurden mit diesem vektorbasierten Zeichenprogramm erstellt. Es basiert auf dem Graphik-Standard SVG.

6. Schluss

Die tägliche Sonnenscheindauer, die solch einen hohen Stellenwert in unserem Leben hat, ist es wert sich näher damit zu beschäftigen. Obwohl sie rechnerisch und messtechnisch bestimmt werden konnte, hat sie doch bei tieferer Betrachtungsweise eine erstaunliche Komplexität bewiesen. Um eine exakte Rechnung zu ermöglichen müsste eine große Vielfalt an Einflüssen, darunter die der anderen Planeten auf die Erde, berechnet werden. Obwohl in diese Richtung schon weit fassende Algorithmen entwickelt wurden, wird es doch nie möglich sein diese mit hundertprozentiger Genauigkeit zu berechnen. Mit meiner Facharbeit konnte ich aber beweisen, dass auch ein astronomischer Laie in der Lage ist eine Berechnung durchzuführen, wenn auch mit eingeschränkter Genauigkeit.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass meine vereinfachte Berechnung mit allgemein bekannten Grundlagen, durchaus konkurrenzfähige Ergebnisse liefern kann.

7. Literaturverzeichnis

Deutscher Wetterdienst: Klimadaten;

Internetseite <http://www.dwd.de/de/WundK/Klimadaten/index.htm>; aufgerufen am 12.01.05

Heimann Elektronik: Datenblatt des Fotowiderstands A 9060-11 (s. Anhang C 2)

Oera T.: Texture maps, Internetseite <http://www.oera.net/How2/TextureMaps.htm>, aufgerufen am 7.11.2004 (siehe Anhang C 6)

Roth G. D.: Handbuch für Sternfreunde – Wegweiser für die praktische astronomische Arbeit; Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960.

U.S. Naval Observatory, Astronomical Applications Department: Data Services, Internetseite http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.html, aufgerufen am 20.12.2004 (s. Anhang C 3)

Rise, Set, and Twilight Definitions,

Internetseite http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/RST_defs.html, aufgerufen am 22.12.2004 (s. Anhang C 4)

Vohl A.: Sonnenscheindauer;

Internetseite <http://www.wetterstation-goettingen.de/sonnenscheindauer.htm> vom 17.06.2004, aufgerufen am 18.01.2005 (s. Anhang C 1)

Wikipedia, die freie Enzyklopädie:

Artikel „Schiefe der Ekliptik“; Internetseite

http://de.wikipedia.org/wiki/Schiefe_der_Ekliptik, aufgerufen am 15.01.05 (s. Anhang C 5)

Artikel „Quadrant“; Internetseite http://de.wikipedia.org/wiki/Quadrant_%28Astronomie%29, aufgerufen am 10.01.05 (s. Anhang C 7)

8. Abbildungsverzeichnis

Alle Abbildungen ohne Quellenangabe, insbesondere Fotos und Grafiken, wurden von mir selbst aufgenommen, bzw. mit dem Computer erstellt!

Die Abbildungen sind nach folgendem Schema benannt:

„Abb. <Hauptkapitel-Nr.> - <Abb.-Nr. in diesem Kapitel>“

Abbildungen, deren Sinn aus dem Text hervorgeht, sind nicht zusätzlich beschriftet.

Erklärung

*„ Ich erkläre, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und
nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel benutzt
habe.“*

.....

Thomas Raffler